T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

mention :

par M ademoiselle BENNOUR Leila

Sujet de la thèse :

Approche rotor plus deux quasi-particules
de noyaux impairs-impairs à partir d'un
champ self-consistent.

soutenue le 29 JUIN 1983 devant la Commission composée de :

M. le Professeur R.S. NATAF ..... Président

M me Ch. BRIANÇON ..... examinateur

M. Ph. QUENTIN ..... «

Mme A. GIZON ..... «

M. D. GOGNY ..... «

Mme M. MEYER ..... «

M ..... invité

T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

mention :

par M ademoiselle BENNOUR Leila

Sujet de la thèse :

Approche rotor plus deux quasi-particules
de noyaux impairs-impairs à partir d'un
champ self-consistent.

soutenue le 29 JUIN 1983 devant la Commission composée de :

M. le Professeur R.S. NATAF ..... Président

M me Ch. BRIANÇON ..... examinateur

M. Ph. QUENTIN ..... «

Mme A. GIZON ..... «

M. D. GOGNY ..... «

Mme M. MEYER ..... «

M ..... invité

Sc.3e c. 75-22

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543515_0038

S O M M A I R E

Pages

Remerciements

Introduction 1

Chapître I : L'approximation de particules indépendantes en Physique Nucléaire 5

A) Généralités sur l'approximation de Hartree-Fock 6

1) Les équations de H.F 7

2) Solutions des équations de H.F 10

B) Choix de la force effective 11

C) Les corrélations d'appariement 13

Chapître II : Le modèle Rotor plus deux quasi-particules 19

1) Hamiltonien du modèle 19

2) Construction de la base 22

3) Calcul de la matrice énergie 24

4) Calcul de la contribution de $\alpha\ E_{qp}(\alpha)\ a^{+}_{\alpha}\ a_{\alpha}$ 26

5) Calcul de la contribution de V_{resid} .....

6) Calcul de la contribution de H_{coll} 30

7) Conclusion 32

Chapître III : Interaction résiduelle proton-neutron 35

1) Calcul des éléments de matrice de V_{eff} 35

2) Tests des calculs 40

3) Terme de Gallagher-Moszkowsky, termes de Newby et règles de sélection 41

Chapître IV : Etude du noyau ^{238}Np 59

1) Introduction 59
2) Quelques détails de calcul 60
3) Les résultats pour le noyau ^{238}Np 62

Chapître V : Etude du noyau ^{174}Lu 83

Introduction 83

1) Détermination HF + BCS des propriétés statiques de $^{172,174}Yb$ et $^{174,176}Hf$ 84
2) Le calcul rotor plus deux quasi-particules du spectre ^{174}Lu 84

Conclusion 88

Conclusion 97

Appendice A 99

Appendice B 103

Appendice C 104

Appendice D 109

Appendice E 115

Références 119

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Spectrométrie Nucléaire et de Spectrométrie de Masse, Salomon Rosenblum.

Je remercie Madame Briançon de son accueil bienveillant et d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je suis très reconnaissante à Monsieur le Professeur Nataf d'avoir accepter de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Madame Gizon et Monsieur Gogny, pour avoir bien voulu faire partie de mon jury.

A l'origine de cette thèse se trouve Philippe Quentin. Il l'a suivie et guidée avec beaucoup d'attention. Je lui en suis très reconnaissante.

Je tiens à remercier tout particulièrement Jean Libert et Michelle Meyer qui m'ont conseillée et guidée pour mener ce travail à bonne fin.

Mes remerciements vont aussi à Monique Vilain ainsi qu'à René Lentignac qui ont su réaliser la transcription de ce travail avec une patience et un soin particuliers, sans oublier l'équipe du Centre de Calcul de l'I.P.N.-Orsay.

INTRODUCTION

Les noyaux impairs-impairs n'ont fait l'objet que de relativement peu d'études microscopiques, si l'on excepte les calculs élaborés à partir de modèles en couches phénoménologiques et du modèle unifié développé depuis longtemps par de nombreux auteurs et les résultats très récents sur les noyaux impairs-impairs du modèle de Nilsson tournant. A notre connaissance, aucune description complètement microscopique, c'est-à-dire bâtie uniquement à partir d'une interaction nucléon-nucléon n'a encore été entreprise.

Le succès de l'approximation du champ moyen (champ de Hartree-Fock) et de l'utilisation d'une force effective nucléon-nucléon de type Skyrme pour la description des noyaux pairs-pairs et pairs-impairs, nous invitaient très naturellement à étendre cette approche au cas des noyaux impairs-impairs. En effet la bonne reproduction des propriétés globales nucléaires (énergie totale, moments multipolaires statiques et rayons carrés moyens d'une part et d'autre part des propriétés spectroscopiques (spectres, moments et probabilités de transitions réduites)) de noyaux impairs très divers, dans différentes régions de déformation, constituent une excellente motivation pour une telle extension.

Nous avons donc entrepris la réalisation d'une description microscopique des noyaux impairs-impairs. L'approche que nous présentons comporte une partie collective décrivant la dynamique du coeur pair-pair et une partie intrinsèque décrivant la dynamique des particules de valence en interaction. La déformation du coeur pair-pair et les états individuels de proton et de neutron sont définis par la solution Hartree-Fock plus BCS au fondamental du coeur pair-pair construite à partir de l'interaction effective de Skyrme SIII et sous les hypothèses de symétrie axiale. L'interaction résiduelle proton-neutron déduite de cette approche microscopique est bien entendu et de façon cohérente la même interaction SIII que celle utilisée pour le calcul du champ moyen.

Par ailleurs, l'étude expérimentale des noyaux impairs-impairs à basse énergie d'excitation a connu ces dernières années un regain d'intérêt avec le développement des techniques de réaction par ions lourds (IL, xn, yp, γ) Ces réactions transférant des forts moments angulaires peuplent préférentiellement les états de très haut spin de bandes rotationnelles. Elles ont considérablement enrichi la connaissance de la structure à basse énergie des noyaux impairs-impairs connus auparavant par la seule spectroscopie de décroissance radioactive. Un ensemble de données expérimentales nouvelles concernant en général des noyaux situés loin de la ligne de stabilité, tant transitionnels (1) que déformés (2,3) est ainsi offert à la confrontation avec les modèles de structure nucléaire, en vue en particulier de tester la qualité de fonctions d'onde individuelles présentes dans ces approches théoriques.

Dans le chapître I, nous faisons un bref rappel sur l'approximation de Hartree-Fock plus BCS, utilisant des forces effectives nucléon-nucléon. Dans le cas particulier de l'interaction de Skyrme, nous décrivons la méthode de résolution de ce problème variationnel proposé par Brink et Vautherin (4,5). Nous rappelons également comment on peut introduire de façon particulièrement simple des corrélations d'appariement. Nous introduisons enfin notre description des noyaux impairs-impairs en termes d'états à deux quasi-particules proton et neutron solutions des équations HF + BCS.

Le chapître II traite de l'approximation Rotor-plus-deux quasi-particules. En partant du Hamiltonien microscopique à deux corps et d'une base d'états à deux quasi-particules proton et neutron, on fait apparaître l'énergie d'un noyau impair-impair comme la somme d'une énergie du coeur pair-pair dans son état intrinsèque, d'un terme d'énergie de quasi-particules indépendantes et d'une interaction résiduelle neutron-proton. L'approximation consiste à introduire un terme tenant compte de la dynamique (ici la rotation) du coeur et corrélativement une base d'états tenant compte des degrés de libertés du rotor. Notre approche tient compte du fait que les moments d'inertie du coeur peuvent varier avec le moment angulaire.

Le calcul et l'étude de la validité des éléments de matrice de l'interaction proton-neutron entre états Hartree-Fock font l'objet du chapître III. Nous discutons des résultats obtenus pour quelques noyaux de la région des terres rares, en termes de ce qu'on appelle couramment les énergies de Gallagher-Mozzkowski et de Newby, par comparaison avec les valeurs semi-empiriques extraites par Boisson et al (13).

Les chapîtres IV et V sont consacrés à la discussion des résultats obtenus avec notre modèle dans les cas des noyaux ^{238}Np et ^{174}Lu qui ont fait l'objet d'études expérimentales très approfondies.

P R E M I E R C H A P I T R E

I - L'APPROXIMATION DE PARTICULES INDEPENDANTES EN PHYSIQUE NUCLEAIRE

L'existence d'une structure en couches dans le noyau justifie l'approximation de Hartree-Fock (HF), ou encore approximation de particules indépendantes du problème à N corps nucléaires.

En Physique nucléaire, l'approximation de particules indépendantes ne semblait pas s'imposer à priori. Les forces nucléaires, en effet, ont un terme tenseur et présentent une forte répulsion à très courte portée. Ces termes causent des corrélations à deux corps qui ne peuvent pas être exactement décrites lorsqu'on approche le système par des particules se mouvant de façon indépendante, dans un champ moyen dû à l'interaction nucléon-nucléon libre. C'est essentiellement le principe de Pauli qui assure la validité de cette approximation : un nucléon en interaction ne peut pas effectuer des transitions entre son orbite et les orbites voisines déjà occupées par les autres nucléons. Ceci a pour effet d'augmenter le libre parcours moyen effectif qui devient de l'ordre de grandeur des distances nucléaires (quelques Fermis). On peut en fait [6,7] définir des forces effectives, V_{eff}, qui tiennent compte des excitations virtuelles des nucléons en dehors de la mer de Fermi, telles que si $|\psi>$ et H sont la fonction d'onde et le Hamiltonien exacts du système, on ait

$$< \phi \, |H_{eff}| \, \phi> \sim < \psi|H|\psi >,$$ ϕ étant un déterminant de Slater construit sur les fonctions d'onde des particules individuelles. En principe V_{eff} dans la matière nucléaire, peut être calculée à partir d'une interaction nucléon-nucléon libre à l'approximation de Brückner (les seules contributions prises en compte, à cette approximation, proviennent des diagrammes d'interaction en échelle), puis alors déduite dans les noyaux finis à l'aide de l'approximation de densité locale (tout se passe localement en $\vec{r}$ dans le noyau fini de densité $\rho\ (\vec{r})$ comme dans la matière nucléaire infinie de densité $\rho_o = \rho\ (\vec{r})$).

Les calculs des propriétés de saturation dans la matière nucléaire donnent une bonne confirmation de la qualité de cette approche. Cependant, pour avoir un bon accord qualitatif, l'introduction d'un terme correctif phénoménologique, tenant compte de l'effet des diagrammes ignorés, par

l'approximation de Brückner paraît nécessaire. Ces interactions effectives sont donc semi phénoménologiques, mais présentent en particulier l'intérêt d'être extraites presque entièrement d'un point de vue microscopique. Compte tenu de la difficulté de l'approche de type Brückner et de la nécessaire introduction d'une partie phénoménologique, on peut choisir dès le départ un point de vue entièrement phénoménologique en définissant a priori une paramétrisation de l'interaction effective.

Cette approche consiste à choisir une forme analytique de cette interaction effective, forme qui reproduirait les faits marquants des interactions semi-phénoménologiques, en particulier la dépendance en densité. Les forces de type Gogny [8,9] et de type Skyrme [10] sont de telles forces phénoménologiques. Cette dernière qu'on choisira, correspond à un développement de courte portée d'une interaction centrale [11,12] et rend compte des propriétés générales des noyaux dont la reproduction est indispensable telle que la propriété de saturation et la dépendance en densité.

Il convient cependant de tenir compte en outre des corrélations d'appariement, ce qui sera réalisé ici, à l'approximation de BCS, avec une matrice d'appariement constante, soit pour tout état à une particule i, j, $G_{ij} = \langle i\bar{i} | V | j\bar{j} \rangle = -G$.

A - Généralités sur l'approximation de Hartree-Fock

Soit un noyau constitué de A nucléons, le problème de la physique nucléaire est de résoudre son équation de Schrödinger. Ici on ne s'intéresse qu'au problème statique. On suppose que l'interaction N-N effective est à deux corps. Le hamiltonien microscopique d'un tel système prend la forme :

$$H = \sum_{i=1}^{A} T_i + 1/2 \sum_{i \neq j=1}^{A} V_{ij}^{(2)} \qquad (I-1)$$

où T_i est l'énergie cinétique du nucléon i, et $V_{ij}^{(2)}$ est le potentiel à deux corps existant entre les nucléons i, j.

La solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps équivaut à résoudre l'équation aux valeurs propres de ce Hamiltonien (I-1)

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \qquad (I-2)$$

Le formalisme de Hartree-Fock repose sur le principe variationnel de Ritz qui indique que tout vecteur $|\psi>$ qui rend stationnaire la fonctionnelle $E(\psi) = \frac{<\psi|H|\psi>}{<\psi|\psi>}$ (I-3)

est vecteur propre du spectre discret de H avec pour valeur propre, la valeur stationnaire de $E(\psi)$. De plus, quelque soit l'état dynamique $|\psi>$ du système, la valeur de l'énergie qui lui est associée $E(\psi)$ est supérieure ou égale à l'énergie propre du fondamental E_o. Comme il est impossible de décrire tout l'espace des fonctions d'onde à A corps, on doit se contenter de résoudre le problème aux valeurs propres $H|\psi> = E|\psi>$ de façon approchée en restreignant $|\psi>$ à décrire un sous-ensemble de l'espace de Hilbert contenant les fonctions les plus proches possibles de la solution exacte. Le succès du modèle en couches selon lequel tout se passe dans le noyau comme si les A nucléons se mouvaient indépendamment les uns des autres, dans un potentiel moyen, nous incite à chercher une solution dans l'espace restreint des déterminants de Slater à A particules. Le fondamental approché du noyau est donc optimalement déterminé par le minimum de $E(\psi)$ où $|\psi>$ appartient au sous-ensemble restreint.

En conséquence, on cherchera le déterminant de Slater $|\phi>$ d'ordre A, par définition, normé qui minimise $<\phi|H|\phi>$.

1) Les équations de Hartree-Fock

Le Hamiltonien H de l'équation (I-1) s'écrira en seconde quantification en fonction d'une base d'opérateurs de création et d'anihilation a_i^+, a_j, comme suit :

$$H = \sum_{ij} <i|T|j> a_i^+ a_j + 1/4 \sum_{ijkl} <ij|V|\widetilde{kl}> a_i^+ a_j^+ a_l a_k \qquad (I-4)$$

où $<ij|V|\widetilde{kl}>$ représente l'élément de matrice antisymétrisé du potentiel à 2 corps $V^{(2)}$ de l'équation (I-1)

Si $|\phi>$ est la solution du problème, et par conséquent le fondamental approché, il s'écrira en représentation nombre d'occupation

$$|\phi> = \prod_{\alpha=1}^{A} C_\alpha^+ |0> \qquad (I-5)$$

où les opérateurs C_α^+, C_α ($\alpha \geq A$ et $\alpha < A$) forment une base d'opérateurs de création et d'anihilation, appelée base des états HF ou des orbites HF,

et donc se déduisent de toute base a_i^+ par une transformation unitaire

$$a_i^+ = \sum_\alpha D_{\alpha i} C_\alpha^+ \qquad \text{(I-6)}$$

La base de vecteurs $a_i^+ |0\rangle$ sera noté $|i\rangle$ alors que celle provenant de l'action des opérateurs C_α^+ sur le vide sera notée $|\alpha\rangle$.

On représente généralement le déterminant de Slater $|\phi\rangle$ par les éléments d'une matrice appelée matrice densité définie comme suit :

$$\rho_{ij} = \langle\phi|a_j^+ a_i|\phi\rangle \qquad \text{(I-7)}$$

En utilisant l'équation (I-6) on a :

$$\rho_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{A} D_{i\alpha} D_{j\alpha}^* \qquad \text{(I-8)}$$

puisque est diagonale dans la base C_α^+, C_α avec les valeurs propres (nombres d'occupation) 1 pour $\alpha \leqslant A$ (état de trou) et 0 pour $\alpha > A$ (état de particules). De plus, la trace de ρ est égale au nombre de particules A.

Par suite, une variation du déterminant de Slater $|\phi\rangle$ est équivalente à une variation des éléments de matrice densité associés. Le théorème de Wick nous permet par ailleurs de calculer l'énergie de l'équation (I-3) comme une fonctionnelle de la matrice densité

$$E^{HF}[\rho] = \langle\phi|H|\phi\rangle = \sum_{ij} \langle i|T|j\rangle_{ij} + 1/2 \sum_{ijkl} \rho_{ki} \langle ij|\widetilde{V}|kl\rangle \rho_{lj} \qquad \text{(I-9)}$$

La recherche d'une base $|\alpha\rangle$ où ρ est diagonal, nous amène à minimiser $E^{HF}[\rho]$ de l'équation (I-9) tel que $\rho^2 = \rho$.

Pour une petite variation $\delta\rho$, ρ doit rester un projecteur :

$$(\rho + \delta\rho)^2 = \rho + \delta\rho \qquad \text{(I-1)}$$

Soit encore au premier ordre

$$\delta\rho = \rho\, \delta\rho + \delta\rho\, \rho \qquad \text{(I-11)}$$

Dans la base de HF, ρ est diagonal. Cela implique que les éléments de matrice $\delta\rho$ (particule-particule) et (trou-trou), doivent être nuls et les seules variations permises de la matrice-densité $\delta\rho$, sont $\delta\rho_{pt}$ et $\delta\rho_{tp}$ (avec t pour trou et p pour particule)

la variation de l'énergie $\delta E[\rho]$ est donnée par :

$$\delta E^{HF}[\rho] = E[\rho + \delta\rho] - E[\rho] \qquad \text{(I-12)}$$

On appelle Hamiltonien de Hartree-Fock, h, la matrice hermitienne définie comme suit :

$$h_{ij} = \frac{\partial E^{HF}[\rho]}{\partial \rho_{ji}} \qquad \text{(I-13)}$$

et en remplaçant $E^{HF}[\rho]$ par l'équation (I-9), on obtient

$$h_{ij} = \langle i|T|j\rangle + \sum_{kl} \langle il|V_{eff}|\widetilde{jk}\rangle \rho_{kl} \qquad \text{(I-14)}$$

La condition $\delta E^{HF}[\rho] = 0$ pour la solution de Hartree-Fock et le fait que les variations $\delta\rho$ sont arbitraires, impliquent que :

$$h_{\alpha\beta} = \langle \alpha|T|\beta\rangle + \sum_{\gamma=1} \langle\alpha\gamma|V|\widetilde{\beta 1}\rangle = 0 \qquad \text{(I-15)}$$

(pour tout $\alpha \leqslant A \quad \beta > A$)

C'est-à-dire que dans la base où ρ est diagonal, le Hamiltonien de Hartree-Fock ne peut pas opérer entre des états de particules et des états trous et forme donc une matrice diagonale par bloc dans cette base.

Le calcul du produit des matrices h, et φ dans cette base donnerait d'une part :

$$\langle \alpha|h\rho|\beta\rangle = h_{\alpha\beta} \qquad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \leqslant A$$
$$= 0 \qquad \text{Autrement}$$

d'autre part :

$$\langle \alpha|\rho h|\beta\rangle = h_{\alpha\beta} \qquad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \leqslant A$$
$$= 0 \qquad \text{Autrement}$$

ce qui implique que l'équation (I-15) est équivalente à

$$[h,\rho] = 0 \qquad \text{(I-16)}$$

Ceci exprime le fait que h et ρ peuvent être diagonalisés simultanément et donc les états propres de ρ (base Hartree-Fock) sont aussi états propres de h. L'équation (I-16) se ramène alors à un problème aux valeurs propres

$$\langle \beta|h|\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}\, e_\alpha$$
$$h|\alpha\rangle = e_\alpha|\alpha\rangle \qquad \text{(I-17)}$$

En résumé, le principe variationnel nous a permis d'approcher le fondamental d'un noyau de A nucléons par un déterminant de Slater d'ordre A construit sur les états propres du Hamiltonien à un corps h_{ij} de l'équation (I-17). L'énergie de cet état fondamental est :

$$E_{HF} = 1/2 \sum_{\alpha=1}^{A} (\langle\alpha|T|\alpha\rangle + e_\alpha) \qquad \text{(I-18)}$$

2) Solution des équations de H.F.

Comme on l'a déjà vu, les éléments de matrice de l'Hamiltonien HF s'écrivent en utilisant (I-14) et (I-6),

$$\langle i|h|j\rangle = \langle i|T|j\rangle + \sum_{\alpha=1}^{A} \sum_{k,l=1}^{\infty} D_{k\alpha}\, D_{\alpha\rho} \langle ik|V|\widetilde{jl}\rangle \qquad \text{(I-19)}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle i|h|j\rangle\, D_{\alpha j} = e_\alpha\, D_{\alpha i} \qquad \text{(I-20)}$$

Ces équations forment un système couplé non linéaire que nous résoudrons par un processus itératif. Les calculs ne sont évidemment possibles que si l'on tronque la base $|i\rangle$, d'où une nouvelle approximation qui conduira inévitablement à une élévation en énergie du fondamental approché. Ces calculs sont grandement allégés par les hypothèses de symétrie que l'on peut faire sur le fondamental du noyau ; trois symétries cohérentes sont choisies pour l'étude des noyaux déformés :

* Symétrie axiale pour les variables d'isospin
* Symétrie axiale suivant l'axe Oz pour les variables d'espace
* Symétrie de réflexion par rapport à un plan équatorial pour les variables d'espace.

Les orbites HF seront par conséquent solutions propres des opérateurs τ_z (troisième composante de l'isospin), j_z (composante sur l'axe Oz du moment angulaire total) et P (parité) dont les valeurs propres seront les bons nombres quantiques du problème.

De plus, on postule l'invariance du noyau par renversement du sens du temps. Autrement dit, tout niveau individuel et son renversé du temps, ne pourront être que simultanément occupés ou inoccupés. Ce qui nous limitera aux noyaux pairs-pairs.

La solution itérative des équations variationnelles de HF se fait par diagonalisation de la matrice h_{HF} sur une base finie. On se donne au départ un ensemble de valeurs $\{D_{\alpha i}^{(0)}\}$ et à l'aide de l'équation (I-19), on calcule la matrice $\langle i|h|j\rangle$, que l'on diagonalise conformément à (I-20), après avoir classé les valeurs propres ainsi obtenues dans l'ordre des énergies croissantes. On décide d'occuper les A plus basses, ce choix est arbitraire cependant il reproduit en général bien l'énergie totale d'HF minimale.

Le nouvel ensemble $\{D_{\alpha i}^{(1)}\}$ résultant de la diagonalisation permet de calculer à nouveau la matrice h et ainsi de suite... jusqu'à convergence des valeurs propres et des états propres. Compte tenu des symétries imposées, il est judicieux d'utiliser une base d'oscillateur harmonique déformé à symétrie axiale, définie par la donnée de deux paramètres, les deux fréquences ω_z et $\omega_\perp$. Il ne s'agit que de paramètres de calcul et on dispose pour les déterminer du principe variationnel sur l'énergie totale.

B - Choix de la force effective

L'interaction effective que nous emploierons est l'interaction de Skyrme avec la paramétrisation (S III). Cette interaction que nous étudierons plus en détail dans le châpitre III, comporte une partie centrale et un terme en spin-orbite. Elle n'a donc pas de terme tenseur. Elle comprend en outre des corrections dépendantes des vitesses relatives et un terme dépendant linéairement de la densité. Toutes ces contributions ont par ailleurs une portée nulle. Les paramètres de la partie centrale de cette force ont été déterminés à partir des propriétés de saturation de quelques noyaux magiques. Dans le cas particulier de l'interaction effective de type Skyrme, Vautherin et Brink [4,5] ont montré que l'énergie $E^{HF}[\rho]$ s'exprime simplement comme l'intégrale d'une densité hamiltonienne ne dépendant de $\vec{r}$ que par des densités locales (densité "usuelle" $\rho(\vec{r})$, densité d'énergie cinétique $\tau(\vec{r})$ et densité de spin-orbite $J(\vec{r})$ avec la notation de Vautherin et de Brink [4,5].

En pratique, la résolution des équations HF pour la force employée se fait de la manière suivante : à partir d'un puits de Saxon-Woods, on calcule une première matrice densité ρ par diagonalisation et pour cette matrice un nouvel hamiltonien h^{HF} et ainsi de suite juqu'à la convergence Les propriétés nucléaires globales telles que déformations statiques, énergies de liaisons et rayons carrés moyens, sont remarquablement

reproduites sur l'ensemble de la table des nuclides [4,5,14-23]. D'autre part, les fonctions d'onde individuelles extraites de ces calculs donnent des spectres qui sont tout-à-fait en accord avec ceux obtenus, dans un calcul de type Nilsson ou ceux utilisant un puits de Saxon-Woods déformé [24,25].

Les orbites sont définies par leurs décompositions sur la base de l'oscillateur harmonique déformé $\{|i>\}$,

$$|\alpha> = \sum_i C_\alpha^i |i> \qquad \text{(I-21)}$$

La base $|i>$, appelée base asymptotique, est décrite dans l'appendice A. Ces orbites $|\alpha>$, états propres de j_z P et Z_z, seront notées $|\alpha, k_\alpha>$ où k_α est la valeur propre de l'opérateur j_z et α condense tous les autres nombres quantiques caractérisant cet état (π_α parité de cet état).

L'énergie d'une orbite est égale à

$$e_\alpha = <\alpha\ k_\alpha|T|\alpha,\ k_\alpha> + \sum_{\beta=1} <\alpha,k_\alpha,\beta\ k_\beta|V_{eff}|\alpha,\widetilde{k_\alpha},\beta\ k_\beta> \qquad \text{(I-22)}$$

L'orbite renversée du sens du temps de $|\alpha>$ notée $|\bar{\alpha}>$, ou encore $|\overline{\alpha,\ k_\alpha}>$, aura la même énergie e_α que l'état individuel $|\alpha,\ k_\alpha>$.
Si $|\alpha, k_\alpha>$ se décompose sur une base d'oscillateur harmonique déformé avec des coefficients C_α^i eq.(I-21) alors $|\alpha,k_\alpha>$ se décompose sur la base de l'oscillateur sphérique : $|nljk>$ avec des coefficients $C_{\alpha,k}^{nlj}$ qui proviennent du produit C_α^i et des coefficients T (nljk,i) de la décomposition de $|i>$ sur $|nljk>$; cf Appendice A, notamment l'équ.(A-11).

$$\begin{aligned} |\alpha,k_\alpha> &= \sum_i C_\alpha^i \sum_{nlj} T\ (nljk,i)|nlj_\alpha k_\alpha> \\ &= \sum_{nlj\alpha} C_{\alpha,k}^{nlj\alpha}|nlj_\alpha k_\alpha> \end{aligned} \qquad \text{(I-23)}$$

L'état renversé du sens du temps de l'état $|\alpha,k_\alpha>$ s'écrit :

$$|\overline{\alpha,k_\alpha}> = \sum_i C_\alpha^i\ |\bar{i}> \qquad \text{(I-24)}$$

où $|\bar{i}>$ est le renversé du sens du temps de l'état asymptotique $|i>$ (equ. A-10), qui se décompose sur la base sphérique, à l'aide de l'équation (A-12) :

$$|\alpha,\ k\alpha> = \sum_{nlj\alpha} C_{\alpha,k\alpha}^{nl,j_\alpha}\ (-1)^{j_\alpha+k_\alpha}\pi_\alpha|nlj_\alpha - k_\alpha> \qquad \text{(I-25)}$$

C - Les corrélations d'appariement

Nous savons en fait que des corrélations d'appariement existent dans les noyaux et qu'elles influencent notamment leurs propriétés de déformation. Pour tenir compte de telles corrélations, une des approximations possibles est d'effectuer un calcul HF + BCS. On peut encore simplifier cette approximation en choisissant la force d'appariement de telle sorte que la matrice : $G_{ij} = \langle i\bar{i}|V|j\bar{j}\rangle$ soit constante et égale à $-G$ ($G > 0$).

En pratique, la constante de pairing G est déterminée expérimentalement par la différence d'énergie de liaison entre noyaux pairs et noyaux impairs, reliée dans le cadre de l'approximation BCS, à l'énergie de quasi-particule la plus basse, qui pour un spectre HF suffisamment dense est à peu près égale au gap d'appariement.

Les équations de BCS comme celles de HF se déduisent de l'application du principe variationnel en vue de minimiser l'énergie pour une fonction d'onde d'essai BCS

$$|BCS\rangle = \prod_{\alpha>0} (u_\alpha + v_\alpha\, a^+_\alpha\, a^+_{\bar{\alpha}})\,|\,0\rangle \qquad \text{(I-26)}$$

où les u_α, v_α sont des paramètres réels variationnels dont les carrés représentent la probabilité qu'une paire d'états $(\alpha,\bar{\alpha})$ soit occupée ou non. Le produit (I-23) parcourt la moitié de l'espace de configuration comme indiqué ($\alpha > 0$) sachant qu'à chaque état $\alpha > 0$, il correspond l'état transformé par renversement du sens du temps $\bar{\alpha}$.

La normalisation de l'état $|BCS\rangle$ impose que :

$$\forall\, \alpha\ ; \quad u_\alpha^2 + v_\alpha^2 = 1 \qquad \text{(I-27)}$$

La variation de l'énergie du système est contrainte par la condition supplémentaire que le nombre de particules soit conservé en valeur moyenne. Si N est l'opérateur nombre de particules

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} a^+_\alpha\, a_\alpha \qquad \text{(I-28)}$$

alors, $$\langle BCS|N|BCS\rangle = 2 \sum_{\alpha>0} v_\alpha^2 = A \qquad \text{(I-29)}$$

cf Appendice C (équ. C-10)

On cherchera donc à minimiser la quantité suivante

$$H = H - \lambda N \tag{I-30}$$

Dans (I-27), λ est un multiplicateur de Lagrange fixé par la condition (I-26), il est appelé potentiel chimique, ou énergie de Fermi. Il représente l'accroissement de l'énergie $E = \langle BCS|H|BCS \rangle$ quand le nombre de particules varie

$$\lambda = \frac{\partial E}{\partial N} \tag{I-31}$$

En utilisant l'équation (C.14) de l'appendice C, l'énergie totale du système approchée par cette fonction d'onde :

$$\begin{aligned} E = \langle BCS|H|BCS \rangle = \\ = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \langle\alpha|T|\alpha\rangle\, v_\alpha^2 + 1/2 \sum_{\alpha\beta} \langle\alpha\beta|V|\widetilde{\alpha\beta}\rangle\, v_\alpha^2\, v_\beta^2 \\ + 1/4 \sum_{\alpha\beta} \langle\alpha\bar{\alpha}|V|\widetilde{\beta\bar{\beta}}\rangle\, u_\alpha\, v_\alpha\, u_\beta\, v_\beta \end{aligned} \tag{I-32}$$

Dans le cas d'un calcul de type BCS et en faisant l'hypothèse que les éléments de matrice d'appariement de l'interaction soient constants ;

$$G_{\alpha\beta} = \langle \alpha\, \bar{\alpha}|V|\beta\bar{\beta} \rangle = -G \tag{I-33}$$

On a :

$$E = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \langle\alpha|T|\alpha\rangle\, v_\alpha^2 + 1/2 \sum_{\alpha\beta} \langle\alpha\beta|v|\widetilde{\alpha\beta}\rangle\, v_\alpha^2\, v_\beta^2 - G/4\left[\sum_\alpha v_\alpha\, (1-v_\alpha^2)^{1/2}\right]^2 \tag{I-34}$$

La variation de l'énergie totale E (I-31) par rapport aux états $|\alpha\rangle$ (ou leurs fonctions d'ondes $\langle\vec{r}\,|\alpha\rangle = \phi_\alpha(\vec{r})$) et aux quantités v_α^2 conduit aux équations recherchées.

Cette variation doit s'effectuer sous deux contraintes : conservation du nombre de particules (I-26) et conservation de la norme

$$\int |\phi_\alpha(\vec{r})|^2\, d\vec{r} = 1$$

Quand on varie indépendamment les quantités v_α^2 et $\phi_\alpha(\vec{r})$, on obtient pour les variations des $\phi_\alpha(\vec{r})$, les équations de Hartree-Fock trouvées au paragraphe (2)

$$h^{HF}|\alpha\rangle = e_\alpha|\alpha\rangle \tag{I-35}$$

$$h^{HF}_{\alpha\beta} = \langle\alpha|T|\beta\rangle + \sum_\gamma \langle\alpha\gamma|V|\widetilde{\beta\gamma}\rangle\, v_\gamma^2$$

En effet, le dernier terme, qui apparait dans l'équation (I-31) de l'énergie totale est seulement dépendant des v_α^2. Sa variation par rapport aux $\phi_\alpha(\vec{r})$ est nulle.

La variation des v_α^2 conduit d'autre part à l'équation :

$$\forall \alpha \; ; \left(\frac{\partial}{\partial v_\alpha} + \frac{du_\alpha}{dv_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \right) \langle BCS|H|BCS\rangle = 0 \qquad \text{(I-36)}$$

soit en définissant :

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = e_\alpha - \lambda \qquad \text{(I-37)}$$

$$\Delta_\alpha = G/2 \sum_\beta u_\beta \, v_\beta \qquad \text{(I-38)}$$

L'équation (I-36) prend la forme

$$\forall \alpha>0 \; ; \quad 2 \tilde{\varepsilon}_\alpha \, u_\alpha \, v_\alpha + \Delta_\alpha \, (v_\alpha^2 - u_\alpha^2) = 0 \qquad \text{(I-39)}$$

C'est l'équation de BCS à l'approximation (I-33), elle entraîne donc :

$$v_\alpha^2 = 1/2 \left(1 + \frac{e_\alpha - \lambda}{E_\alpha}\right) \; ; \; u_\alpha^2 = 1/2 \left(1 - \frac{e_\alpha - \lambda}{E_\alpha}\right) \qquad \text{(I-40)}$$

où l'énergie de quasi-particule E_α notée encore $E_{qp}(\alpha)$ est définie par :

$$E_\alpha = \left[(e_\alpha - \lambda)^2 + \Delta^2 \right] 1/2 \qquad \text{(I-41)}$$

La résolution des équations (I-39) contrainte par l'équation de normalisation (I-24) donne, en fait, une autre valeur possible de v_α^2 qu'on éliminera avec les conditions aux limites du cas où les forces de pairing sont nulles ($v_\alpha^2 = 1$, pour les états occupés).

Les équations (I-42) et (I-29) forment un système couplé d'équations non linéaires de HF + BCS. Il doit être résolu par itération avec les équations de définition (I-37) et (I-39).

En pratique, on généralise (ref.5) tout d'abord les densités locales $\rho(\vec{r})$, $\tau(\vec{r})$ et $\vec{J}(\vec{r})$, correspondant à un remplissage Hartree-Fock, au moyen des probabilités d'occupation v_α^2. De plus on ajoutera à l'énergie totale $E^{HF}[\rho]$, une énergie supplémentaire, dite énergie de condensation de paires donnée par :

$$E_p = - G/4 \left[\sum_\alpha v_\alpha \, (1 - v_\alpha^2)^{1/2} \right]^2 \qquad \text{(I-42)}$$

Soit $|\alpha\rangle$, les orbites individuelles HF et v_α^2, leurs probabilités d'occupation, solutions des équations HF + BCS. On construit des opérateurs de quasi-particules (transformation de Bogoliubov-Valatin) comme suit :

$$\eta_\alpha^+ = u_\alpha\, a_\alpha^+ - v_\alpha\, a_{\bar\alpha}$$
$$\eta_{\bar\alpha}^+ = u_\alpha\, a_{\bar\alpha}^+ + v_\alpha\, a_\alpha \qquad \text{(I-43)}$$

Les opérateurs a_α^+, a_α sont les opérateurs de création et d'anihilation des fermions correspondant à l'état individuel $|\alpha\rangle$. Leurs décompositions sur une base d'oscillateur harmonique déformé (respectivement sur une base sphérique) sont données par les équations (I-21) (resp. I-23).

De même, les opérateurs $a_{\bar\alpha}^+$, $a_{\bar\alpha}$ créant ou annihilant l'état renversé du sens du temps de l'état α se décomposent sur ces mêmes bases suivant les équations (I-24),(I-25) et leurs adjointes.
On peut montrer que $|BCS\rangle$ est un vide pour les opérateurs η_α^+ (I-43).

Il est intéressant de noter que les états à une quasi-particule, à 2 quasi-particules, à n quasi-particules définis comme suit :
$\eta_\alpha^+|BCS\rangle$, $\eta_\alpha^+\,\eta_\beta^+|BCS\rangle$, ... $\eta_\alpha^+\,\eta_\beta^+ \ldots .\eta_\gamma^+\,|BCS\rangle$ ne sont pas des états à bon nombre de particules. En effet à partir de l'équation (C-12), on a

$$\langle BCS\ \eta_\alpha |N|\ \eta_\alpha^+\ BCS\rangle = u_\alpha^2 - v_\alpha^2 + A \qquad \text{(I-44)}$$

avec $A = \langle BCS|N|BCS\rangle$

Si l'état $|BCS\rangle$ décrit le fondamental approché d'un noyau (à A particules) pair, $\eta_\alpha^+|BCS\rangle$ décrira donc les impairs voisins $A \pm 1$ de façon approchée.

A cette approximation, les noyaux impairs auront une énergie

$$E_{A\pm1} = E(BCS) + E_{qp}(\alpha) \qquad \text{(I-45)}$$

obtenue en calculant la valeur moyenne de H' entre l'état à une quasi-particule.
De la même façon, un état à deux quasi-particules $\eta_\alpha^+\,\eta_\beta^+\,|BCS\rangle$ avec $\alpha \neq \beta$ a un nombre de particules moyen, cf l'équ. (C-14).

$$\langle BCS\ \eta_\beta\ \eta_\alpha |N|\ \eta_\alpha^+\,\eta_\beta^+\ BCS\rangle = A + (u_\alpha^2 - v_\alpha^2) + (u_\beta^2 - v_\beta^2) \qquad \text{(I-46)}$$

et peut donc décrire, en particulier, tous les impairs-impairs voisins du coeur pair en prenant les état α et β individuels de HF des états neutron et proton.

L'énergie de ces noyaux impair-impairs est obtenue en calculant la valeur moyenne du Hamiltonien H' entre des états à deux quasi-particules neutrons et protons.

$$\langle BCS\ \eta_{p'}, \eta_{n'} | H' |\ \eta_n^+ \eta_p\ | BCS\rangle = \qquad \text{(I-47)}$$

$$\delta_{pp'}, \delta_{nn'}, E_{BCS} + \delta_{pp'}, \delta_{nn'} \left[E_{qp}(n) + E_{qp}(p) \right]$$

$$+ \ (u_n u_{n'}, u_p u_{p'} + v_n v_{n'}, v_p v_{p'},) \langle n'p' | V_{eff} | np \rangle$$

$$- \ (u_n u_{n'}, v_p v_{p'}, + u_p u_{p'}, v_n v_{n'},) \langle n'\bar{p} | V_{eff} | n\bar{p}' \rangle$$

où l'on a utilisé l'équation (C-16) et l'équation (C-17). Dans l'équation (I-47) l'élément de matrice interaction est direct compte tenu du fait que l'interaction V employée ne mélange pas des états d'isospins différents (n et p).

D E U X I E M E C H A P I T R E

II - LE MODELE ROTOR PLUS DEUX QUASI-PARTICULES

1) Hamiltonien du modèle

On a vu dans le chapître précédent que les noyaux impairs-impairs peuvent être approchés par des états à deux quasi-particules neutron et proton. Ces états peuvent être extraits de calculs self-consistents utilisant une force effective de type Skyrme et menés sur les noyaux pairs voisins.

Dans le cadre de cette approche du champ moyen HF + BCS, le Hamiltonien microscopique décrivant un système de A particules en interaction

$$H = \sum_{ij} \langle i|T|j\rangle \, a_i^+ a_j + \sum_{ijkl} \langle ij|V_{eff}|\widetilde{kl}\rangle \, a_i^+ a_j^+ a_l a_k$$

est équivalent à :

$$H = E_{BCS} + \sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha) \, \eta_\alpha^+ \eta_\alpha + V_{resid} \qquad \text{(II-1)}$$

où les η_α^+ , η_α sont des opérateurs de quasi-particules.
Les énergies E_{BCS} et $E_{qp}(\alpha)$ et V_{resid} sont données par les équations (C-15) et (c-11).

Dans la base des états à une quasi-particule neutron et à une quasi-particule proton, la matrice d'énergie s'écrit :

$$\langle BCS \, \eta_{p'} \, \eta_{n'} \, |H| \, \eta_n^+ \, \eta_p^+ \, BCS\rangle = \delta_{n,n'} \, \delta_{p,p'} \left[E_{BCS} + E_{qp}(n) + E_{qp}(p)\right]$$
$$+ \langle n' \, p'|V_{eff}|np\rangle \, (u_n \, u_{n'} \, u_p \, u_{p'} + v_n \, v_{n'} \, v_p \, v_{p'})$$
$$- \langle n' \, \bar{p}|V_{eff}|n\bar{p}'\rangle \, (u_n \, u_{n'} \, v_p \, v_{p'} + v_n \, v_{n'} \, u_p \, u_{p'})$$

Le Hamiltonien du noyau impair-impair est donc à cette approximation la somme de l'énergie du coeur pair et des énergies des quasi-particules proton et neutron externes, auxquelles est ajoutée une contribution dûe à l'interaction neutron-proton.

L'état $|BCS\rangle$ décrit le coeur du noyau impair-impair dans son état intrinsèque, c'est-à-dire comme un mélange d'états de bon moment angulaire. Si on veut tenir compte de chacun des membres de la bande rotationnelle inclus dans cet état intrinsèque, on doit projeter cet état $|BCS\rangle$ sur des

états normalisés de bon moment angulaire R, ayant une énergie E(R) qu'on peut toujours mettre sous la forme $\left[\hbar^2/2\mathcal{J}(R)\right] R(R+1)$ où $\mathcal{J}(R)$ est un moment d'inertie variable.

On a :

$$|BCS\rangle = \sum_{\substack{R=0 \\ R\ pair}}^{\infty} \langle R|BCS\rangle |R\rangle$$

et

$$E_{BCS} = \langle BCS|H|BCS\rangle = \sum_{\substack{R=0 \\ R\ pair}}^{\infty} \langle R|BCS\rangle^2 \left[\hbar^2/2\mathcal{J}(R)\right] R(R+1)$$

L'énergie E_{BCS} est donc une valeur moyenne sur la bande rotationnelle d'un Hamiltonien collectif H_{coll}. L'approximation retenue ici consiste à remplacer, dans l'opérateur Hamiltonien (II-1), la valeur moyenne E_{BCS} par l'opérateur H_{coll} ce qui implique nécessairement l'introduction de degrés de libertés nouveaux dans la fonction d'onde décrivant le spectre de H_{coll}. Le Hamiltonien collectif H_{coll} n'est rien d'autre que l'opérateur énergie cinétique de rotation du coeur avec moment d'inertie variable.

Dans cette approximation le noyau impair-impair apparaît comme un coeur déformé décrit par le Hamiltonien collectif plus une quasi-particule neutron et une quasi-particule proton en interaction [26,45,48] :

$$H = H_{coll} + \sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta_{\alpha}^{+}\ \eta_{\alpha} + V_{resid} \qquad (II-2)$$

On notera par $\vec{I}$ le moment angulaire total du noyau, par $\vec{J}$ la somme des moments angulaires $\vec{j}_n$, $\vec{j}_p$ des quasi-particules proton et neutron célibataires et par $\vec{R}$, celui du coeur, soit :

$$\vec{J} = \vec{j}_n + \vec{j}_p \qquad (II-3)$$

$$\vec{R} = \vec{I} - \vec{J} \qquad (II-4)$$

La partie collective du Hamiltonien (II-2) correspondant à la rotation du coeur est donnée par :

$$H_{coll} = \sum_{i=1}^{3} \frac{R_i^2}{2\mathcal{J}_i} \qquad (II-5)$$

où les R_i sont les opérateurs projections du moment angulaire $\vec{R}$ sur les axes intrinsèques du coeur et les $\mathcal{J}_i$ ses moments d'inertie par rapport à

ces mêmes axes de rotation (dépendant de R_i). En éliminant R_i^2 dans l'équation (II-5), H_{coll} s'écrit à l'aide de (II-4)

$$H_{coll} = H_{rot} + H_{recul} + H_{Cor} \qquad \text{(II-6)}$$

avec : $$H_{rot} = \frac{I_1^2}{2\mathcal{J}_1} + \frac{I_2^2}{2\mathcal{J}_2} + \frac{I_3^2}{2\mathcal{J}_3} \qquad \text{(II-7)}$$

où les I_i sont les opérateurs projections du moment angulaire total du système sur les axes liés au coeur. Le Hamiltonien H_{rot} est un opérateur purement rotationnel qui agit sur les degrés de liberté du rotor seul (angles d'Euler et leurs moments conjugués), les nombres quantiques M et K sont définis comme suit : M est la valeur propre de la projection de I sur l'axe Oz du système de référence du laboratoire et peut donc prendre toutes les valeurs entières entre (-I et +I), K est la valeur propre de I sur l'axe de symétrie du coeur (Oz) et prend aussi toutes les valeurs entières entre (-I et +I).

$$H_{recul} = \sum_{i=1}^{3} J_i^2/2\mathcal{J}_i \qquad \text{(II-8)}$$

où les J_i sont les projections de $\vec{J}$ sur les axes intrinsèques du coeur, ce terme est appelé terme de recul, il agit sur les seules coordonnées des quasi-particules neutron et proton de valence, mais il contient aussi une interaction particule-particule induite par la rotation. En effet on voit clairement apparaitre, si on remplace dans (II-8) $\vec{J}$ par ses composantes $\vec{j}_n$ et $\vec{j}_p$ données par l'équation (II-3), des termes de type $j_{ni} \cdot j_{pi}$ où les j_{ni}, j_{pi} sont les projections de $\vec{j}_n$, $\vec{j}_p$ sur les axes liés au coeur.

$$H_{recul} = \sum_{i=1}^{3} \frac{j_{ni}^2}{2\mathcal{J}_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{j_{pi}^2}{2\mathcal{J}_i} + 2 \sum_{i=1}^{3} \frac{j_{ni} \cdot j_{pi}}{2\mathcal{J}_i} \qquad \text{(II-9)}$$

Le facteur 2 qui apparait dans le dernier terme de l'équation (II-9) est dû au fait que les j_{ni}, j_{pj} sont des opérateurs (qu'on supposera à un corps) agissant dans des espaces différents, donc commutant entre eux :

$$\forall_i, \forall_j \quad \{1,2,3\} \; ; \; \left[j_{ni}, j_{pj} \right] = 0 \qquad \text{(II-10)}$$

Finalement le dernier terme qui apparaît dans H_{coll} équ.(II-6) H_{Cor} est appelé interaction de Coriolis. Il couple les degrés de liberté du rotor à celles des quasi-particules externes. Ce couplage est purement cinétique.

$$H_{cor} = -2 \sum_{i=1}^{3} I_i . J_i / 2\mathcal{J}_i \qquad \text{(II-11)}$$

La même remarque sur le facteur 2 de l'équation (II-9) s'applique au facteur 2 de l'équation (II-11) puisque :

$$\forall\, i,j \; ; \; \left[I_i, J_j\right] = 0 \qquad \text{(II-12)}$$

De même que H_{coll} inclut un couplage géométrique entre les quasi-particules externes et la rotation du rotor, la partie en $\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\, \eta_\alpha^+ \eta_\alpha$ du Hamiltonien total, equation (II-2), comprend aussi un couplage dynamique quasi-particule-coeur, par l'intermédiaire du champ moyen (HF + BCS). En effet cette partie du Hamiltonien donne les énergies des quasi-particules de valence, se mouvant dans le potentiel déformé . L'interaction résiduelle qui apparaît dans l'Hamiltonien H, équation (II-2) est donnée par l'équation (C-11)

$$V_{resid} = 1/4 \sum_{ijkl} \eta_i^+ \eta_j^+ \eta_l \eta_k \Big[(u_i u_j u_l u_k + v_i v_j v_l v_k) \langle ij | V_{eff} | \widetilde{kl} \rangle + 4\, u_i u_k v_j v_l \langle il | V_{eff} | \widetilde{jk} \rangle \Big] \qquad \text{(II-13)}$$

où V_{eff} est bien entendu la même interaction effective de Skyrme S III que celle qui a servi à définir le champ moyen (HF + BCS) et donc également :

$\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\, \eta_\alpha^+ \eta_\alpha$, comme il est montré en appendice C.

Ce terme V_{resid} donnera l'énergie d'interaction entre les deux quasi-particules proton et neutron externes.

2) Construction de la base utilisée

On se propose dans ce qui suit de chercher les états propres et les valeurs propres du Hamiltonien H, équation (II-2). Les éléments de matrice de H doivent être calculés dans une base adéquate. A la base des états à deux quasi-particules on doit ajouter, comme on l'a vu, une base d'états décrivant les degrés de liberté du coeur.

La fonction d'onde totale cherchée est une fonction propre de I^2 et de I_z (I_z projection du moment angulaire sur l'axe Oz du système du laboratoire) avec les valeurs propres I(I+1) et M.

On se place dans l'hypothèse où les noyaux étudiés présentent un coeur ayant une déformation d'équilibre à symétrie axiale autour de l'axe 3 du système de référence lié au coeur. Ceci implique d'une part que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3 \neq 0$ et suggère d'autre part de prendre pour fonctions d'onde de base des états propres de I_3 avec la valeur propre K.

Avec les notations du chapître précédent, un état à deux quasi-particules neutron-proton sera noté $\eta^{+}_{\alpha_n k_n} \eta^{+}_{\alpha_p k_p} |BCS\rangle$

Une fonction d'onde de base pourrait donc être :

$$|I\ M\ K\ \alpha_n\ \alpha_p\rangle = C\ D^{I}_{M,K}(\Omega)\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n}\ \eta^{+}_{\alpha_p k_p}\ |BCS\rangle$$

avec $K = k_n + k_p$

où Ω représente les angles d'Euler faisant passer du système du laboratoire au référentiel lié au coeur et C une constante de normalisation.

Mais l'invariance du système lors d'une rotation de π par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du rotor implique que la solution symétrique soit de la forme [26] :

$$|I\ M\ K\ \alpha_n\ \alpha_p\rangle = \left[2I+1/16\pi^2\right]^{1/2} \qquad \text{(II-14)}$$

$$D^{I}_{M,K}(\Omega)\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n} \eta^{+}_{\alpha_p k_p} |BCS\rangle + (-I)^{I+K}\ \pi_n\ \pi_p\ D^{I}_{M,-K}(\Omega)\ \eta^{+}_{\bar{\alpha}_n k_n}\ \eta^{+}_{\bar{\alpha}_p k_p} |BCS\rangle$$

Les états à deux quasi-particules renversés du sens du temps des états $\eta^{+}_{\alpha_n k_n} \eta^{+}_{\alpha_p k_p} |BCS\rangle$ sont définis par les opérateurs de quasi-particules

$$\eta^{+}_{\bar{\alpha}_i k_i} = u_{\alpha_i}\ a^{+}_{\bar{\alpha}_i k_i} + v_{\alpha_i}\ a_{\alpha_i k_i} \qquad \text{(II-15)}$$

$i = (n,p)$

en fonction des opérateurs de particules $a^{+}_{\bar{\alpha}\,k}$ et $a_{\alpha\ k}$.

La parité des états (II-14) est donnée par le produit des parités des états intrinsèques neutron et proton $\pi_n\ \pi_p$. Les états de la base standard (II-14) ne sont pas des états de bon nombre quantique K. En effet pour $K = k_n + k_p \geq 0$

$$I_z\ |I\ M\ K\ \alpha_n\ \alpha_p\rangle = \left[2I+1/16\ ^2\right]^{1/2}\ K \qquad \text{(II-16)}$$

$$\left[D^{I}_{M,K}(\Omega)\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n}\ \eta^{+}_{\alpha_p k_p} |BCS\rangle - (-I)^{I+K}\ \pi_n\ \pi_p\ D^{I}_{M,-K}(\Omega)\ \eta^{+}_{\bar{\alpha}_n k_n}\ \eta^{+}_{\bar{\alpha}_p k_p} |BCS\rangle\right]$$

$$\neq K\ |\ I\ M\ K\ \alpha_n\ \alpha_p\ \rangle$$

En pratique, la construction de cette base se fait de la manière suivante : on sélectionne tous les états de neutron et de proton dont l'énergie HF est située dans un voisinage de l'ordre de deux fois le gap

d'appariement, c'est-à-dire en fait de l'ordre de ± 2 MeV, autour des niveaux de Fermi, pour le fondamental d'un coeur pair voisin. Avec un couple d'états (α_n, k_n), (α_p, k_p) on peut construire deux états de base non dégénérés

$$K = ||k_n| + |k_p|| \quad \text{noté } K_>$$
$$K = |k_n - k_p| \quad \text{noté } K_<$$

Pour construire les états $K_>$ on couple des états $(\alpha_n, k_n)(\alpha_p, k_p)$ tels que k_n et k_p soient tous les deux positifs ; alors que pour construire les états $K_<$:

- Si $k_n \geqslant k_p$, on couple les états (α_n, k_n) et $(\overline{\alpha_p, |k_p|})$

- Si $k_n < k_p$, on couple les états $(\overline{\alpha_n, |k_n|})$ et $(\alpha_p, |k_p|)$.

3) Calcul de la matrice énergie

Soit $\mathcal{O}$ un opérateur hermitique, sa valeur moyenne entre des états de la base standard définis en équ.(II-14) est égale :

$$\langle I\ M\ K\ k_n, k_p, \alpha_n, \alpha_p, |\mathcal{O}|\ I\ M\ K\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p \rangle = (2I+1/16\pi^2)$$

$$\Big[\langle BCS\ \eta_{\alpha_p, k_p},\ \eta_{\alpha_n, k_n},\ D^I_{M,K'}\ |\mathcal{O}|\ D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle$$

$$+(-1)^{2I+K+K'} \pi_n \pi_p \pi_{n'}, \pi_{p'} \langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p, k_p}},\ \eta_{\overline{\alpha_n, k_n}},\ D^I_{M,-K'} |\mathcal{O}|\ D^I_{M,-K}\ \eta^+_{\overline{\alpha_n k_n}}\ \eta^+_{\overline{\alpha_p k_p}}\ BCS\rangle$$

$$(-1)^{I+K} \pi_n \pi_p \langle BCS\ \eta_{\alpha_p, k_p},\ \eta_{\alpha_n, k_n},\ D^I_{M,K'}\ |\mathcal{O}|\ D^I_{M,-K}\ \eta^+_{\overline{\alpha_n k_n}}\ \eta^+_{\overline{\alpha_p k_p}}\ BCS\rangle$$

$$+(-1)^{I+K'} \pi_{n'}, \pi_{p'} \langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p, k_p}},\ \eta_{\overline{\alpha_n, k_n}},\ D^I_{M,-K'}\ |\mathcal{O}|\ D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle \Big] \qquad (II\text{-}17)$$

Par renversement du sens du temps, les matrices de Wigner se transforment en leur complexe conjugué :

$$T\ D^I_{M,K}(\Omega) = D^{I*}_{M,K}(\Omega) = (-1)^{M-K}\ D^I_{-M,-K}(\Omega) \qquad (II\text{-}18)$$

et par conséquent :

$$T \Big[D^I_{M,K}\ \eta^+_{\overline{\alpha_n k_n}}\ \eta^+_{\overline{\alpha_p k_p}}\ |BCS\rangle \Big] = (-1)^{M-K} \Big[D^I_{-M,-K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ |BCS\rangle \Big] \qquad (II\text{-}19)$$

L'hypothèse de l'invariance de l'opérateur par renversement du sens du temps :

$$T\,\mathcal{G}\,T^{-1} = \mathcal{G} \qquad \text{(II-20)}$$

et par reflection d'espace (conservation de la parité totale de l'état)

$$\pi_n\,\pi_p = \pi_{n'}\,\pi_{p'} \qquad \text{(II-21)}$$

entraîne d'une part que le deuxième terme de l'expression (II-17) est égal à :

$$\langle BCS\ \eta_{\alpha_p,k_p}\,\eta_{\alpha_n,k_n}\,D^I_{-M,K'}\ |\mathcal{G}|\ D^I_{-M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle \qquad \text{(II-22)}$$

d'autre part que le troisième terme de cette même expression est égal à :

$$(-1)^{I+K'}\ \pi_{n'}\,\pi_{p'}\langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p},k_p}\,\eta_{\overline{\alpha_n},k_n}\,D^I_{-M,K'}\ |\mathcal{G}|\ D^I_{-M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle \qquad \text{(II-23)}$$

L'opérateur $\mathcal{G}$ est un opérateur scalaire, donc ses éléments de matrice ne dépendent pas de M à I donné. Par conséquent, les équations (II-22) et (II-23) où on remplacera -M en M, sont respectivement égales au premier et au quatrième terme de l'expression (II-17).

Dans ce qui précède, on a utilisé, en plus des équations (II-19, 20 et 21), le fait que les nombres quantiques I et M sont tous les deux entiers et que $\pi_n^2 = \pi_p^2 = +1$.

Il en résulte que :

$$\langle IMK\ k_{n'},k_{p'},\alpha_{n'},\alpha_{p'}\ |\mathcal{G}|\ IMK\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle = (2I+1/8\pi^2) \qquad \text{(II-24)}$$

$$\Big[\langle BCS\ \eta_{\alpha_p,k_p}\,\eta_{\alpha_n,k_n}\,D^I_{M,K'}\ |\mathcal{G}|\ D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle$$
$$+(-1)^{I+K'}\ \pi_n,\pi_p,\langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p},k_p}\,\eta_{\overline{\alpha_n},k_n}\,D^I_{M,-K'}\ |\mathcal{G}|\ D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle\Big]$$

Le Hamiltonien total du système équ.(II-2) est hermitique, invariant par renversement du sens du temps et par réflection d'espace, par conséquent sa valeur moyenne entre des états (II-14) sera donnée par l'expression (II-24) Plus précisément on aura à évaluer chacun des trois termes de H à savoir

H_{coll} , $\sum_\alpha E_{qp}(\alpha)\ \eta^+_\alpha\ \eta_\alpha$ et V_{resid}.

4) Calcul de la contribution de $\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\eta_{\alpha}$

En utilisant l'équ.(II-24), on a : (II-25)

$$\langle I\ M\ k_n,k_p,\alpha_n,a_p,\ |\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\eta_{\alpha}\ |I\ M\ k_{nkp}\alpha_n\alpha_p\rangle$$

$$= \delta_{K,K'}\ \langle BCS\ \eta_{\alpha_p,k_p},\eta_{\alpha_n,k_n},D^{I}_{M,K'}\ |\ \sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\eta_{\alpha}\ |D^{I}_{M,K}\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n}\eta^{+}_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle$$

$$+ \delta_{K,-K'}(-1)^{I+K'}\ \pi_n,\pi_p,$$

$$\langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p,k_p}},\eta_{\overline{\alpha_n,k_n}},\ D^{I}_{M,-K'}|\ \sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\ \eta_{\alpha}|\ D^{I}_{M,K}\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n}\eta^{+}_{\alpha_p k_p}\ BCS\rangle$$

Les $\delta_{K,K'}$ et $\delta_{K,-K'}$ proviennent du fait que cette partie du Hamiltonien n'opère pas dans l'espace des degrés de liberté du coeur, et de ce que

$$\frac{2R+1}{8\pi^2}\int D^{I*}_{M,\pm K'}(\Omega)\ \ D^{I}_{M,K}(\Omega)\ d(\Omega) = \delta_{K,\pm K'} \qquad \text{(II-26)}$$

L'équation (C-14) nous donne la valeur moyenne d'un opérateur à un corps entre les états à deux quasi-particules.

$$\langle BCS|\eta_{\alpha_p,k_p},\eta_{\alpha_n,k_n},\ (\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\ \eta_{\alpha})\ \eta^{+}_{\alpha_n k_n}\eta^{+}_{\alpha_p k_p}|BCS\rangle$$

$$= \delta_{p,p'}\ \delta_{n,n'}\left[E_{qp}(n) + E_{qp}(p)\right] \qquad \text{(II-27)}$$

$\delta_{p,p'}$ (resp. $\delta_{n,n'}$) est une notation condensée exprimant le fait qu'il s'agit des mêmes états protons (resp. neutrons).

Le deuxième terme en $\delta_{K,-K'}$ de l'équ.(II-25) ne peut être non nul que pour les états avec K et K' tous les deux nuls. Il est égal à : $(-1)^{I}\pi_n\pi_p\ \delta_{\bar{p}',p}\ \delta_{\bar{n}',n}\left[E_{qp}(n) + E_{qp}(p)\right]$. En fait la construction même de la base standard exclut ce terme. On ne peut pas avoir simultanément des états construits avec le couple $(\alpha_n,k_n),(\alpha_p,-k_p)$ et avec le couple $(\alpha_n,-k_n),(\alpha_p,k_p)$.

Par conséquent, le terme en $(-1)^{I+K'}$ dans l'équ.(II-25) donne une contribution nulle. Cette partie du Hamiltonien conduit donc seulement à des termes diagonaux :

$$\langle I\ M\ k_n,k_p,\alpha_n,\alpha_p,\ |\ \sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\ \eta_{\alpha}|\ I\ M\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle$$

$$= \delta_{n,n'}\ \delta_{p,p'}\ \left[E_{qp}(n) + E_{qp}(p)\right] \qquad \text{(II-28)}$$

Ces contributions seront indépendantes du moment angulaire total du noyau I et par ailleurs seront égales entre elles pour les états $K_>$ et les états $K_<$ (sachant que des états individuels HF et leur renversé du sens du temps, ont la même énergie E_{qp}, ce qui reflète la dégénérescence de Kramer).

5) Calcul de la contribution de V_{resid}

L'interaction V_{resid} est exprimée en fonction des opérateurs de quasi-particules par l'équ.(C-11). Elle n'agit pas sur les variables collectives du noyau et sa valeur moyenne entre des états à deux quasi-particules est donnée par l'équ.(C-17). On a :

$$\langle I\ M\ k_n,k_p,\alpha_n,\alpha_p,\ |V_{resid}|\ I\ M\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle = \qquad \text{(II-29)}$$

$$\delta_{K,K'}\ \Big[\langle\alpha_n,k_n,,\alpha_p,k_p,\ |V_{eff}|\ \alpha_n k_n,\alpha_p k_p\rangle\ (u_n u_n,\ u_p u_p,\ +\ v_n v_n,\ v_p v_p,)$$

$$-\ (u_n u_n,\ v_p v_p,\ +\ u_p u_p,\ v_n v_n,)\ \langle\alpha_n,k_n,,\overline{\alpha_p k_p}\ |V_{eff}|\ \alpha_n k_n\ \overline{\alpha_p,k_p,}\rangle\Big]$$

$$+\ (-1)^{I}\ \delta_{K,0}\ \delta_{K,-K'}\ \pi_{n'}\pi_{p'}$$

$$\Big[(u_n u_n,\ u_p u_p,\ +\ v_n v_n,\ v_p v_p,)\ \langle\overline{\alpha_n,k_n},,\overline{\alpha_p,k_p},\ |V_{eff}|\ \alpha_n k_n,\alpha_p k_p\rangle$$

$$+\ (u_n u_n,\ v_p v_p,\ +\ u_p u_p,\ v_n v_n,)\ \langle\overline{\alpha_n,k_n},,\overline{\alpha_p k_p}\ |V_{eff}|\ \alpha_n k_n,\alpha_p,k_p,\rangle\Big]$$

Dans l'équation (II-29) la différence de signe entre les deux termes faisant intervenir le facteur de pairing $(u_n u_n,\ v_p\ v_p,\ +\ u_p u_p,\ v_n v_n,)$ provient de ce que $|\overline{\overline{\alpha'_p\ k'_p}}\rangle = -|\alpha'_p\ k'_p\rangle$

Le terme dépendant de $(-1)^I$ est obtenu en remplaçant dans l'équ.(C-17) $(\alpha_p,k_p,)$ par $(\overline{\alpha_p,k_p,})$ et $(\alpha_n,\ k_n,)$ par $(\overline{\alpha_n,k_n,})$.

Le symbole $\delta_{K,0}$ provient de la condition $\delta_{K,-K'}$ avec $K \geqslant 0$ et $K' \geqslant 0$.

La contribution de V_{resid} à la valeur moyenne du Hamiltonien total n'affectera* que les éléments de matrices diagonaux en K, avec une contribution supplémentaire pour les états de moment angulaire K nul dépendant de la parité du nombre quantique.

6) Calcul de la contribution de H_{coll}

Le partie collective H_{coll} du Hamiltonien total va opérer à la fois sur les matrices de Wigner et sur les fonctions d'onde de quasi-particules

$$<I\ M\ k_n,k_p,\alpha_n,\alpha_p,\left|\frac{\hbar^2}{2\Im(R)}\vec{R}^2\right|\ I\ M\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p> = (2I+1/8\pi^2) \qquad \text{(II-30)}$$

$$\Big[<BCS\ \eta_{\alpha_p,k_p},\eta_{\alpha_n,k_n},\ D^I_{M,K'}\left|\frac{\hbar^2}{2\Im(R)}\vec{R}^2\right|\ D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS>$$

$$+(-1)^{I+K'}\ \pi_n,\pi_p,<BCS\ \eta_{\overline{\alpha_p,k_p}},\eta_{\overline{\alpha_n,k_n}},\ D^I_{M,-K'}\ \left|\frac{\hbar^2}{2\Im(R)}\vec{R}^2\right|D^I_{M,K}\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\eta^+_{\alpha_p k_p}\ BCS>\Big]$$

Pour tenir compte d'une dépendance en R des moments d'inertie $\Im(R)$, on projette la base standard sur une base d'états où $\vec{R}^2$ est diagonal. Pour ce faire, on commence par écrire la base standard en fonction des opérateurs de création et d'anihilation de particules neutrons et protons conformément à l'équation (D-2).

Ensuite on exprime les opérateurs en fonction d'opérateurs de bon nombre quantique j_n et j_p, moments angulaires du neutron et du proton. Selon (I-24) et (I-25), on a :

$$a^+_{\alpha_i k_i} = \sum_{(nl)_i j_i} C^{(nl)_i j_i}_{\alpha_i k_i}\ a^+_{(nl)_i j_i k_i}$$

$$a^+_{\overline{\alpha_i k_i}} = \sum_{(nl)_i j_i} C^{(nl)_i j_i}_{\alpha_i k_i}\ (-1)^{j+k+1}\ a^+_{(nl)_i j_i - k_i}$$

avec $\quad i = (n,p)$ $\qquad$ (II-31)

---

* Pour les éléments de matrice diagonaux de V_{resid}, le terme en $(-I)^I$ n'aura pas de facteur de pairing, il est réduit au seul terme :

$\delta_{K,0}\ (-1)^I\ \pi_n\pi_p\ <\overline{\alpha_n\ k_n},\ \alpha_p\ k_p\ |V_{eff}|\ \overline{\alpha_n\ k_n},\alpha_p\ k_p>$

Les coefficients $C_{\alpha k}^{nlj}$ sont des nombres réels donnés par l'équ. (I-24).

On transforme alors les opérateurs sphériques $a^{+}_{nlj\pm k}$, $a_{nlj\pm k}$ sous la rotation d'angles d'Euler (Ω) faisant passer du repère du laboratoire au repère lié au coeur :

$$a^{+}_{nljk} = \sum_{m} D^{j*}_{m,k}(\Omega)\, a^{+}_{nljm}$$

$$a_{nljk} = \sum_{m} D^{j}_{m,k}(\Omega)\, a_{nljm} \qquad \text{(II-32)}$$

En utilisant les propriétés de combinaisons des matrices de rotation, équ.(D-8), chaque produit $D^{J_n}_{m_n,k_n}(\Omega).D^{J_p}_{m_p,k_p}(\Omega)$ fera apparaître une somme de matrices de rotation $D^{J}_{m_n+m_p,k_n+k_p}(\Omega)$ où $\vec{J}$ est le moment angulaire obtenu en sommant $\vec{j}_n$ et $\vec{j}_p$. En appliquant de nouveau la relation (D-8) pour combiner cette nouvelle matrice $D^{J}_{m_n+m_p,\ k_n+k_p}$ avec la matrice de rotation $D^{I}_{M,\pm K}$ existante dans l'état standard (II-14), on met ainsi en évidence un moment angulaire $\vec{R}$ combinaison de $\vec{I}$ et de $\vec{J}$ tel que le nombre quantique associé R aille de $|-J+I|$ à I + J et une matrice de rotation de type $D^{R}_{M-m_n-m_p,0}(\Omega)$, diagonalisant l'opérateur $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}(R)}\vec{R}^2$, avec la valeur propre $\hbar^2\left[R(R+1)/2\mathcal{J}(R)\right]$.

Pour un calcul détaillé de ce qui précède, voir l'appendice D où on a utilisé en particulier :

a) Le fait que a^{+}_{nljk} et $(-1)^{j+k}\, a_{nlj-k}$ sont des tenseurs irréductibles.

b) Les propriétés des matrices de rotation (D-5) par conjugaison complexe et leurs lois de combinaison (D-8).

c) Les relations reliant les coefficients de Clebsh-Gordan dans une permutation de leurs arguments.

d) Les lois de transformation par renversement du sens du temps des opérateurs de création et d'anihilation des fermions, avec les conventions de phases adoptées dans l'appendice A.

e) Le fait que les nombres quantiques de particules $j_n, j_p, m_n, m_p, k_n, k_p$ sont tous demi-entiers alors que les nombres I,J,R,M,K sont entiers.

Dans l'appendice D, pour obtenir l'élément de matrice final de H_{coll} donné par l'équ. (II-33), on a effectué l'hypothèse simplificatrice suivante. On a défini tout d'abord quatre types d'états :

$$|pp\rangle = a^{+}_{(nl)_p j_p m_p} a^{+}_{(nl)_n j_n m_n} |BCS\rangle$$

$$|tt\rangle = a_{(nl)_p j_p -m_p} a_{(nl)_n j_n -m_n} |BCS\rangle$$

$$|tp\rangle = a_{(nl)_p j_p -m_p} a^{+}_{(nl)_n j_n m_n} |BCS\rangle$$

$$|pt\rangle = a^{+}_{(nl)_p j_p m_p} a_{(nl)_n j_n -m_n} |BCS\rangle$$

respectivement appelés état particule-particule, état trou-trou, état trou-particule et état particule-trou. On a supposé ensuite que ces états forment une base orthonormée, c'est-à-dire que tous les états $a^{+}_{nljm\tau} |BCS\rangle$ et $a_{nlj-m\tau} |BCS\rangle$ sont des états orthonormés (où τ est la troisième composante d'isospin).

On a finalement défini un état propre de $\vec{R}^2$ dit état quasi-sphérique [27-30] comme une combinaison linéaire des états précédents :

$$|R\ I\ M\ J\ (nl)_n\ (nl)_p\ j_n\ j_p\rangle = \sum_{m_n m_p} \left[(2R+1/8\pi^2)\right]^{1/2} \qquad \text{(II-33)}$$

$$\langle j_n\ m_n,\ j_p\ m_p | J\ m_n+m_p\rangle \langle J\ m_n+m_p,\ R\ M-(m_n+m_p) | IM\rangle\ D^{R}_{M-(m_n+m_p),0}(\Omega)$$

$$u_n u_p\ a^{+}_{(nl)_n j_n m_n}\ a^{+}_{(nl)_p j_p m_p} |BCS\rangle$$

$$+ v_n v_p\ (-1)^{j_n+m_n}\ (-1)^{j_p+m_p}\ \pi_p \pi_n\ a_{(nl)_n j_n -m_n}\ a_{(nl)_p j_p -m_p} |BCS\rangle$$

$$+ u_n v_p\ (-1)^{j_p+m_p}\ \pi_p \pi_n\ a^{+}_{(nl)_n j_n m_n}\ a_{(nl)_p j_p -m_p} |BCS\rangle$$

$$+ v_n u_p\ (-1)^{j_n+m_n}\ \pi_p \pi_n\ a_{(nl)_n j_n -m_n}\ a^{+}_{(nl)_p j_p m_p} |BCS\rangle$$

La norme de cet état est égale à :

$$\langle R'\ I\ M\ J'\ (nl)_{n'},\ (nl)_{p'},\ j_{n'}, j_{p'},\ |\ R\ I\ M\ J\ (nl)_n\ (nl)_p\ j_n\ j_p\rangle$$

$$= (u_n u_{n'}, u_p u_{p'} + v_n v_{n'}, v_p v_{p'} + u_n u_{n'}, v_p v_{p'} + u_p u_{p'}, v_n v_{n'})$$

Il apparaît dans le détail du calcul que tous les termes de l'état standard s'expriment comme une combinaison linéaire de ces états quasi-sphériques affectés d'un facteur $(1 + (-1)^R)$. Par conséquent, cet état est nul pour les valeurs de R impair.

Un état de la base standard se décompose sur cette base quasi-sphérique suivant : (II-34)

$$|I\ M\ K_n\ K_p\ \alpha_n\ \alpha_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(n\ell)_n j_n} \sum_{(n\ell)_p j_p} \sum_{J=|j_n - j_p|}^{j_n + j_p}$$

$$\sum_{R=|J-I|}^{J+I} C^{(n\ell)_n\ j_n}_{\alpha_n k_n}\ C^{(n\ell)_p\ j_p}_{\alpha_p k_p}$$

$$\left(\frac{2R+1}{2I+1}\right)^{1/2}\ 2 \langle j_n\ k_n\ j_p\ k_p, |J\ k_n + K_p\rangle \langle J\ k_n + k_p\ R\ 0,\ I\ k_n + k_p\rangle$$

$$|R\ I\ M\ J\ (n\ell)_n\ (n\ell)_p\ j_n\ j_p\rangle$$

L'élément de matrice de $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}(R)}\ \vec{R}^2$ entre des états K et K' est donc donné par :

$$\langle I\ M\ K_n', k_p', \alpha_n', \alpha_p', |\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}(R)}\ \vec{R}^2 | I\ M\ k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle = \quad \text{(II-35)}$$

$$2\ \ (n\ell)^{\Sigma}_{n'}, j_{n'}, (n\ell)^{\Sigma}_{p'}, j_{p'},\ \ (n\ell)^{\Sigma}_{n} j_n\ (n\ell)^{\Sigma}_{p} j_p\ \sum_{J=|j_n - j_p|}^{j_n + j_p}$$

$$\sum_{R=|J-I|}^{J+I} C^{(n\ell)_n\ j_n}_{\alpha_n k_n}\ C^{(n\ell)_p\ j_p}_{\alpha_p k_p}\ \ C^{(n\ell)_n\ j_n}_{\alpha_n', k_n'}\ \ C^{(n\ell)_p\ j_p}_{\alpha_p', k_p'}$$

$$(u_n u_{n'} u_p u_{p'} + v_n v_{n'} v_p v_{p'} + u_n u_{n'} v_p v_{p'} + v_n v_{n'} u_p u_{p'})$$

$$\left(\frac{2R+1}{2I+1}\right)\ \hbar^2\ \frac{R(R+1)}{2\mathcal{J}(R)} \langle J\ K, R\ 0 | I\ K\rangle \langle J\ K', R\ 0 | I\ K'\rangle$$

$$\langle j_n k_n, j_p k_p | J\ k_n + k_p\rangle \langle j_n k_n', j_p k_p', | J\ k_n', + k_p',\rangle$$

Comme V_{resid} et $\sum_{\alpha} E_{qp}(\alpha)\ \eta^{+}_{\alpha}\ \eta_{\alpha}$, cette partie du Hamiltonien total conserve la parité totale mais en plus elle ne mélange pas les parités intrinsèques des particules protons ou neutrons, c'est-à-dire que la valeur moyenne de H_{coll} entre des états construits sur des protons (resp. des neutrons) de parités différentes est nulle.

7) Conclusion

La matrice hamiltonienne dont les éléments sont obtenus en sommant les termes (II-25),(II-28) et (II-30) est une matrice diagonale par bloc. Etant hermitique elle est diagonalisable.

Pour tester les calculs précédents, on a mis en oeuvre une approche différente dans le cas particulier où les moments d'inertie $\mathcal{J}(R)$ sont constants. Dans ce cas, on peut diagonaliser directement dans la base standard. Le Hamiltonien collectif s'écrit alors : (II-36)

$$H_{coll} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\left[\vec{I}^2 - I_z^2 + \vec{j}_p^2 - j_{pz}^2 + \vec{j}_n^2 - j_{nz}^2 + (j_p^+ j_n^- + j_p^- j_n^+) - (I^+(j_p^- + j_n^-) + I^-(j_n^+ + j_n^+))\right]$$

$H_{rot} = \vec{I}^2 - I_z^2$ est appelé terme diagonal de rotation

$H_r = \vec{j}_p^2 - j_{pz}^2 + \vec{j}_n^2 - j_{nz}^2$ est appelé terme de recul

$H_{pp} = j_p^+ j_n^- + j_p^- j_n^+$ est appelé terme de couplage particule-particule

$H_{RPC} = -\left[I^+(j_n^- + j_p^-) + I^-(j_n^+ + j_p^+)\right]$ est appelé terme de Coriolis.

Dans l'appendice E on calcule pour le cas constant, les éléments de matrice de H_{coll} (II-36) dans la base standard. Les éléments de H_r ne dépendent pas du moment angulaire total I et ils sont diagonaux en K. Le terme de Coriolis lui par contre n'aura pas d'éléments de matrice diagonaux. Les termes H_{RPC} comme H_{pp} donneront, si K = 0, une contribution supplémentaire du signe du $(-I)^I$. On a :

$$\langle I\ M\ k_n', k_p', \alpha_n', \alpha_p', \left|\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\vec{R}^2\right| I\ M\ k_n k_p \alpha_p \alpha_n\rangle = \quad \text{(II-37)}$$

$$\delta_{K,K'}\delta_{n,n'}\delta_{p,p'}\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\left[I(I+1) - k^2\right]$$

$$+ \delta_{K,K'}\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\left[-(k_n^2+k_p^2)\,\delta_{n,n'}\,\delta_{p,p'} + \right.$$

$$\delta_{n,n'}(u_p u_{p'} + v_p v_{p'})\langle\alpha_p', k_p', |\vec{j}_p^2|\alpha_p, k_p\rangle + \delta_{p,p'}(u_n u_{n'} + v_n v_{n'})\langle\alpha_n', k_n', |\vec{j}_n^2|\alpha_n, k_n\rangle +$$

$$(u_p u_{p'} + v_p v_{p'})(u_n u_{n'} + v_n v_{n'})$$

$$\delta_{k_p,\, k_p+1}\ \delta_{k_n,k_n-1} \qquad \langle\alpha_p,k_p,\ |j_p^+|\ \alpha_p k_p\rangle \langle\alpha_n,k_n,|j_n^-|\alpha_n k_n\rangle +$$

$$\delta_{k_p,,k_p-1}\ \delta_{k_n,,k_n+1} \qquad \langle\alpha_p,k_p,|j_p^-|\ \alpha_p k_p\rangle \langle\alpha_n,k_n,|j_n^+|\alpha_n k_n\rangle\Big]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\Big[((I-K)(I+K+1))^{1/2}\ \delta_{K+1,K'}$$

$$\Big[\delta_{n,n'}\ \delta_{k_p,,k_p+1}\ \langle\alpha_p,k_p,|j_p^+|\ \alpha_p k_p\rangle\ (u_p u_{p'} + v_n v_{n'})$$

$$+\ \delta_{p,p'}\ \delta_{k_n,,k_n+1}\ \langle\alpha_n,k_n,|j_n^+|\alpha_n k_n\rangle\ (u_n u_{n'} + v_n v_{n'})\Big]$$

$$+\ ((I+K)\ (I-K+1))^{1/2}\ \delta_{K-1,K'}$$

$$\Big[\delta_{k_p,,k_p-1}\ \delta_{n,n'}\ (u_p u_{p'} + v_p v_{p'})\ \langle\alpha_p,k_p,|j_p^-|\ \alpha_p k_p\rangle +$$

$$\delta_{p,p'}\ \delta_{k_n,,k_n-1}\ (u_n u_{n'} + v_n v_{n'})\ \langle\alpha_n,k_n,|j_n^-|\ \alpha_n k_n\rangle\Big]\Big]$$

$$+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\ \pi_{n'}\ \pi_p,(-1)^I\Big[(\delta_{K,0}\ \delta_{K',0}\ (u_n u_{n'} + v_n v_{n'})(u_p u_{p'} + v_p v_{p'})$$

$$\delta_{kp'=-1/2} \qquad \delta_{kp=-1/2}\ \langle\overline{\alpha_{n'},k_{n'}},\left|j_n^+\right|\alpha_n k_n\rangle \langle\overline{\alpha_{p'},k_{p'}},\ \left|j_p^-\right|\ \alpha_p k_p\rangle\Big]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\ \delta_{K,1}\ \ \delta_{K',0}\ \ (I(I+1))^{1/2}$$

$$\Big[\delta_{n,n'}\ \delta_{kp',\,-k_p+1}\ (u_p u_{p'} + v_p v_{p'})\langle\overline{\alpha_{p'},k_{p'}},|j_p^-|\ \alpha_p\ k_p\ \rangle$$

$$\delta_{p,p'}\ \ \delta_{k_{n'}=-k_n+1}\ +\ (u_n u_{n'} + v_n v_{n'})\ \langle\overline{\alpha_{n'},k_{n'}},\ |j_n^-|\ \alpha_n k_n\rangle\Big]$$

Les facteurs de pairing $(u_\alpha u_{\alpha'} + v_\beta v_{\beta'})$ proviennent des valeurs moyennes des opérateurs $\vec{j}^2$ et $j^\pm$ entre des états à une quasi-particule. Si ces valeurs sont exactes pour les opérateurs j^+ et j^-, elles ne sont qu'approchées pour $\vec{j}^2$ à l'approximation discutée dans l'appendice E (cf équ. E-6).

D'autre part, on a :

$$\langle \alpha_n' k_n' | \vec{j}^2 | \alpha_n k_n \rangle = \sum_{(nl)j} C^{nlj}_{\alpha,k} \; C^{nlj}_{\alpha'k'} \; j(j+1)$$

(de même pour les protons), et :

$$\langle \alpha_n' k_n' | j^{\pm} | \alpha_n k_n \rangle = \delta_{k_n', k_n \pm 1} \sum_{(nl)j} C^{nlj}_{\alpha,k} \; C^{nlj}_{\alpha'k'} \left[(j - k_n)(j \pm k_n + 1) \right]^{1/2}$$

On a calculé, pour $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}$ constant avec R, les solutions propres de H en diagonalisant directement dans la base standard (matrice hamiltonienne donnée par l'équ. II-37) d'une part, et en passant par la base des états quasi-sphériques (matrice hamiltonienne donnée par les équ. (II-25), (II-28) et (II-30) d'autre part. Les deux programmes ont donné des éléments de la matrice hamiltonienne égaux à 10^{-5} MeV près.

T R O I S I E M E C H A P I T R E

III - INTERATION RESIDUELLE PROTON-NEUTRON

La force de Skyrme SIII utilisée comme interaction effective dans le modèle HF + BCS a fait, à ce jour, l'objet d'un très grand nombre de travaux qui ont permis d'établir son excellente qualité en ce qui concerne les propriétés statiques globales [14,23] qui en sont issues.

Les propriétés à une particule (état propre du Hamiltonien de H.F.) ont également été comparées en grand détail avec les données spectroscopiques des noyaux impairs [27,37].

Dans ce chapître on se propose d'étudier cette interaction en tant qu'interaction résiduelle neutron-proton pour les noyaux impairs-impairs. Pour cela, on calcule les éléments de matrice de cette interaction dans la base asymptotique décrite dans l'appendice A, et ensuite on étend ces calculs à une base d'états individuels de H.F. Dans l'approximation, rotor plus deux quasiparticules du chapître précédent, la matrice énergie (II-19) comprend des éléments de matrice de V_{eff} entre des états de H.F. neutrons et protons affectés de facteurs de pairing.

En particulier, les éléments diagonaux de V_{eff} sont -comme on le verra plus loin- directement comparables à l'expérience moyennant quelques hypothèses d'ailleurs justifiées [13].

1) Calcul des éléments de matrice de V_{eff}

La force de Skyrme SIII s'écrit comme la somme d'interactions à deux corps de portée nulle (une partie centrale dépendant de la densité et un terme spin-orbite).

$$v = v_c^{(2)} + v_{S.O.}^{(2)} \qquad \text{(III-1)}$$

Elle n'a donc pas de terme tenseur.

En représentation position, V est définie comme suit :

$$\text{i) } v_c^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = a_o\,\delta(\vec{r}) + a_1\left[\vec{\nabla}^2\,\delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r})\;\vec{\nabla}^2\right] + a_2\left[\vec{\nabla}'\,\delta(\vec{r})\,\vec{\nabla}\right] + a_3\,\rho(\vec{r}_1 + \vec{r}_2/2)\,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,(1 + P_\sigma) \qquad \text{(III-2)}$$

avec $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \,/\, \sqrt{2}$, $\vec{\nabla}$ l'opérateur gradient associé à $\vec{r}$

et $a_o = t_o\,(1 + x_o\, P_\sigma)/\, 2^{3/2}$

$a_1 = -\, t_1/2 \,/\, (2)^{5/2}$

$a_2 = t_2 \,/\, 2^{5/2}$

$a_3 = t_3 \,/\, 6$

P_σ étant l'opérateur d'échange de spin

$$ii)\ v_{S.O}^{(2)}(\vec{r}) = i\, W_o/2^{3/2}\ (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2\ /\ 2)(\vec{\nabla} \times \delta(\vec{r}).\vec{\nabla}) \qquad \text{(III-3)}$$

où $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ sont des matrices de Pauli. On notera la présence d'une force dépendant linéairement de la densité $\rho(\vec{r})$ (cette dépendance linéaire est propre à la paramétrisation SIII).

Les paramètres x_o t_6 t_1 t_2 t_3 W_o sont déterminés une fois pour toute pour l'ensemble des noyaux (tableau 1).

Tableau 1 : Paramètres de l'interaction de Skyrme SIII, définis suivant les notations du texte. Le paramètre t_o est exprimé en MeV-fm^3, les paramètres t_1, t_2, W_o en MeV-fm^5, t_3 en MeV-fm^6 et le paramètre x_o est sans dimension.

	t_o	t_1	t_2	t_3	x_o	W_o
SIII	-1128,75	395.0	-95.	1400.	0.45	120.

Compte tenu des propriétés de la base choisies -base asymptotique- et de la simplicité de la force, les éléments de matrice sont aisément calculables. Pour la partie indépendante de la densité, le calcul a été fait au moyen des transformations de Moshinsky [38-39], alors que pour le terme dépendant de $\rho(\vec{r})$, l'intégration a été faite numériquement, suivant les méthodes de Gauss-Legendre et de Gauss-Hermite, déjà utilisées dans la résolution des équations variationnelles HF + BCS [5,15,40].

- Calcul du terme en a_o

On dénote par $|i\rangle$ = 1,2,3,4 les états de la base asymptotique $|i\rangle = |n_i\ \alpha_i\ \beta_i\ \Sigma_i\ \tau_i\rangle$ pour une déformation à symétrie axiale définie par la donnée de $\omega_\perp$ et ω_z ou (C_z et $C_\perp$ C_o) pour les notations cf appendice A.

$$\langle 1,2\ |a_o\ \delta(\vec{r})\ |3,4\rangle = \delta_{\tau_1\tau_3}\delta_{\tau_2\tau_4}\left[\delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4} + x_o\ \delta_{\Sigma_1\Sigma_4}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_3}\right]$$

$$\frac{t_o}{(2)^{3/2}}\ \frac{C_o^3}{\pi^{3/2}}\ \left(\sum_n f^n\ A(n)\ A(n')\right)\ \left(\sum_{a,b} g^{a,b}\ \delta_{a,b}\ \delta_{a'b'}\right) \qquad \text{(III-6)}$$

$C_o = \sqrt{\frac{m\ \omega_o}{\hbar}}$ est appelée constante de l'oscillateur harmonique sphérique ($\omega_o^3 = \omega_\perp^2\ \omega_z$)

$$A(n) = \delta_{n,\text{pair}}\ \frac{(-1)^{n/2}\ \sqrt{n}}{2^{n/2}(n/2)\,!} \qquad \text{(III-7)}$$

f^n et $g^{a,b}$ sont des produits de coefficients de Moshinsky Equ.(B-3).

$$f^n = f^n\ (n_1\ n_2\ n_3\ n_4) = \langle n_1\ n_2 \| n\ N\rangle\langle n_3\ n_4 \| n'N\rangle \qquad \text{(III-8)}$$

$$g^{a,b} = \langle \alpha_1\ \alpha_2 \| aA\rangle\langle \beta_1\ \beta_2 \| bB\rangle\langle \alpha_3\ \alpha_4 \| a'A\rangle\langle \beta_3\ \beta_4 \| b'A\rangle \qquad \text{(III-9)}$$

pour un n donné (respectivement a et b) on déduit n', N (respectivement a',A et b'B) par les règles de sélection sur les coefficients de Moshinsky, relation (B-3).

On remarque que ces éléments de matrice (III-6) sont indépendants de la déformation de la base.

- Calcul du terme en a_1 :

Pour évaluer cet élément de matrice, on se réfère aux équ.(16) de [40] qui donnent les opérateurs ∂_{x_i} en fonction des opérateurs de bosons de la base asymptotique :

$$a_1 \langle 1\ 2\ |\vec{\nabla}^2\ \delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r})\ \vec{\nabla}^2|3\ 4\rangle = \delta_{\tau_1\tau_3}\ \delta_{\tau_2\tau_4}\ \delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4}\ \frac{C_o^3}{\pi^{3/2}}\ \frac{t_1}{2^{5/2}}$$

$$\left[\sum_n f^n\ A(n)\ A(n')\ \sum_{a,b} g^{a,b}\ \delta_{a,b}\ \delta_{a',b'}\ (C_z^2(n+n'+1) + 2\ C_\perp^2(a+a'+1))\right]$$

- Calcul du terme en a_2 :

En utilisant les mêmes techniques pour évaluer l'opérateur gradient $\vec{\nabla}$ en fonction des opérateurs de bosons, on trouve :

$$a_1 \langle 1\ 2 | \vec{\nabla}^+ \delta(\vec{r})\ \vec{\nabla} | 3\ 4\rangle = \frac{2\ t_2}{(2)^{5/2}}\ \frac{C_o^3}{3/2}\ \delta_{\tau_1\tau_3}\ \delta_{\tau_2\tau_4}\ \delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4}$$

$$\Big[(C_z^2\ (_{a,\Sigma_b}\ g^{a,b}\ \delta_{a,b}\ \delta_{a',b'})\ (\sum_n f^n\ A(n-1)\ A(n'-1)\ \sqrt{n\ n'})$$

$$+\ C_\perp^2\ (\sum_n f^n\ A(n)\ A(n'))\ (_{a,\Sigma_b}\ g^{a,b}\ (\sqrt{a+1}\ \sqrt{a'+1}\ \delta_{a+1,b}\ \delta_{a'+1,b'}$$

$$+\ \sqrt{a\ a'}\ \delta_{a-1,b}\ \delta_{a'-1,b'}))\Big] \qquad \text{(III-11)}$$

- Le terme de spin-orbite

On a :

$$\langle 1\ 2 | V^{(2)}_{S.O} | 3\ 4\rangle = \frac{W_o}{(2)^{3/2}}\ \delta_{\tau_1\tau_3}\ \delta_{\tau_2\tau_4} \Big[\qquad \text{(III-12)}$$

$$(\delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4}\ (\Sigma_3 + \Sigma_4).\ \sum_n f^n\ _{a,\Sigma_b}\ g^{a,b} \langle n\ a\ b | L_z | n'a'b'\rangle$$

$$+\ 1/2\ (\delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_{4-1}} + \delta_{\Sigma_1\Sigma_{3-1}}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4})\ \sum_n f^n\ _{a,\Sigma_b}\ g^{a,b} \langle nab | L^+ | n'a'b'\rangle$$

$$+\ 1/2\ (\delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_{4+1}} + \delta_{\Sigma_1\Sigma_{3+1}}\ \delta_{\Sigma_2\Sigma_4})\ \sum_n f^n\ _{a,\Sigma_b}\ g^{a,b} \langle nab | L^- | n'a'b'\rangle \Big]$$

où on a simplement écrit :

$$W_o\ \vec{L}.\vec{S} = W_o \Big[L_z\ S_z + 1/2\ (L^+\ S^- + L^-\ S^+) \Big]$$

et exprimé les opérateurs L_z, L^+ en représentation nombre d'occupation de bosons :

$$\langle n\ a\ b | L_z | n'a'b'\rangle = \frac{2\ C_o^3\ C_\perp^2}{\pi^{3/2}}\ A(n)\ A(n') \qquad \text{(III-13)}$$

$$(\sqrt{a+1}\ \sqrt{a'+1}\ \delta_{a+1,b}\ \delta_{a'+1,b'} - \sqrt{aa'}\ \delta_{a-1,b}\ \delta_{a'-1,b'})$$

et :

$$\langle n\ a\ b | L_+ | n'a'b'\rangle = \frac{2\ \sqrt{2}\ C_z\ C_\perp C_o^3}{\pi^{3/2}} \qquad \text{(III-14)}$$

$$(\delta_{a,b}\ \delta_{a'+1,b'}\ \sqrt{(a'+1)n}\ A(n-1)\ A(n') + \delta_{a-1,b}\ \delta_{a',b'}\ \sqrt{a\ n}\ A(n'-1)\ A(n)$$

Pour obtenir le dernier terme en L^- dans l'expression (III-12) on utilise la relation :

$$\langle n\ a\ b|L^+|n'a'b'\rangle = \langle n'a'b'|L^-|n\ a\ b\rangle \qquad \text{(III-15)}$$

Dans tout ce qui précède, les coefficients de Moshinsky $\langle n\ n_z \| n\ N\rangle$ ont été calculés suivant l'expression (B-3) où les arguments $n_1\ n_2, N$ peuvent prendre toutes les valeurs entières (n_1, n_2 jusqu'à 16 et $N=n_1+n_2$).

De même, les quantités A(n) équ.(III-7) ont été programmées pour tout n à l'aide de la relation de récurrence :

$$\sqrt{n}\,A(n-1) = \sqrt{n+1}\,A(n+1)$$

- Le terme dépendant linéairement de la densité

Les fonctions d'onde de la base asymptotique $\Phi_i(\vec{r})$ sont exprimées en fonction des polynômes de Laguerre et des polynômes de Legendre par les équations (A-18) et (A-19). En conséquence, la densité $\rho(\vec{r})$ fera intervenir des produits comportant quatre polynômes (deux de Legendre et deux de Laguerre). En représentation d'espace, on a :

$$\langle 1,2|V|3,4\rangle = \int d\vec{r}_1\ d\vec{r}_2\ d\vec{r}_3\ d\vec{r}_4\ \phi_1^*(\vec{r}_1)\ \phi_2^*(\vec{r}_2)\ \phi_3(\vec{r}_3)\ \phi_4(\vec{r}_4)$$

$$\langle \vec{r}_1\ \vec{r}_2|V|\vec{r}_3\ \vec{r}_4\rangle. \qquad \text{(III-16)}$$

et l'on obtient pour le terme de l'interaction dépendant linéairement de la densité :

$$\langle 1,2|V|3,4\rangle = \frac{t_3}{6}\,\delta_{\tau_1\tau_3}\,\delta_{\tau_2\tau_4}\,(\delta_{\Sigma_1\Sigma_3}\,\delta_{\Sigma_2\Sigma_4} + \delta_{\Sigma_1\Sigma_4}\,\delta_{\Sigma_2\Sigma_3})$$

$$\int d\vec{r}\ \phi_1^*(\vec{r})\ \phi_2^*(\vec{r})\ \phi_3(\vec{r})\ \phi_4(\vec{r})\rho(\vec{r}). \qquad \text{(III-17)}$$

L'expression (III-17) sera par conséquent l'intégrale de six polynômes de Laguerre et de six polynômes de Legendre.

L'intégration numérique de cette expression a été effectuée à l'aide de la méthode de Gauss-Hermite et de Gauss-Legendre

2) Tests des calculs

Tous les termes de l'interaction effective précédemment définis ont été calculés dans la base asymptotique tronquée selon la prescription suivante [41] :

$$\hbar\omega_\perp (n_\perp + 1) + \hbar\omega_z (n_z + 1/2) \leqslant \hbar\omega (N + 2) \qquad \text{(III-18)}$$

N est un nombre donné qui fixe la taille de la base. Chacun des termes programmés a fait l'objet de plusieurs tests rigoureux, soit par un calcul numérique de quelques éléments de matrices dans des cas simples, soit par comparaison avec le calcul plus complexe de l'énergie Hartree Fock. Rappelons, en effet que pour l'interaction de Skyrme, cette énergie est calculée, dans le programme Hartree-Fock [15], par intégration numérique d'une densité hamiltonienne et non pas par le calcul des éléments de matrice du Hamiltonien.

En pratique, nous avons procédé comme suit : l'énergie minimum d'un noyau dans son état fondamental approché par un déterminant de Slater est donnée par l'expression (II-9) :

$$E_{HF} = \sum_{\alpha\in F} \langle\alpha|T|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\langle\alpha\beta|V|\widetilde{\alpha\beta}\rangle$$

$$= E_C + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\langle\alpha\beta|V|\widetilde{\alpha\beta}\rangle \qquad \text{(III-19)}$$

où E_c est l'énergie cinétique totale.

Or les états individuels α,β de H.F. se décomposent sur la base de l'oscillateur harmonique déformé $|i\rangle$ avec des coefficients C_α^i. Par conséquent E_{HF} s'écrit :

$$E_{HF} = E_C + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\sum_{ijkl} C_\alpha^i\ C_\beta^j\ C_\alpha^k\ C_\beta^l \langle ij|V|\widetilde{kl}\rangle \qquad \text{(III-20)}$$

En partant d'une solution H.F. et en sélectionnant tous les états $|\alpha\rangle$ appartenant à la mer de Fermi, on est capable de calculer la quantité $E^{HF}-E_C$.

Ces tests ont été effectués en ne tenant pas compte de la force de Coulomb pour chacune des contributions a_o, a_1, a_2, pour les termes de spin orbite et celui dépendant de la densité. Ces contributions ont ensuite été comparées séparément avec les résultats du calcul H.F. On a pu vérifier avec ces tests, l'exactitude du calcul de chacune de ces parties de l'interaction.

3) Termes de Gallagher-Moszkowsky, termes de Newby et règles de sélection.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux seuls éléments diagonaux de la matrice hamiltonnienne dans la base standard (dans le cas où les moments d'inertie du coeur sont indépendants du moment angulaire). Cf équations (II-27), (II-18) et (II-19).

Ceux-ci nous permettent de comparer les valeurs moyennes de H entre des états $K_>$ et $K_<$ (notation du chapître précédent). Plus précisément, on cherche à évaluer :

$$\langle I\ M\ K_> | H | I\ M\ K_> \rangle \quad \text{pour } I = K_>$$
$$\text{et} \quad \langle I'M\ K_< | H | I'M\ K_< \rangle \quad \text{pour } I' = K_<$$

notés dans ce qui suit : $\langle K_> | H | K_> \rangle$ et $\langle K_< | H | K_< \rangle$.

L'étude de l'expression (II-37) montre que les termes de Coriolis ne contribuent pas aux éléments diagonaux de la matrice H, à cause des règles de sélection $\delta_{K\pm1,K'}$. Le terme de couplage particule-particule induit par la rotation ne donnera une contribution non nulle à $\langle K_< | H | K_< \rangle$ que si l'état $K_<$ est construit sur les couples d'états $(\alpha_n, 1/2n)$ et $(\alpha_p, -1/2p)$. Cette contribution ne dépendra du moment angulaire total I que par le signe $((-1)^I)$. Le terme de recul donne, quant à lui, la même contribution pour les états $K_>$ et $K_<$.

En effet, compte tenu des propriétés d'invariance des opérateurs $\vec{j}^2$ et j_z^2 par renversement du sens du temps, on a :

$$\langle \alpha\ k_\alpha | \vec{j}^2 | \alpha\ k_\alpha \rangle = \langle \overline{\alpha\ k}_\alpha | \vec{j}^2 | \overline{\alpha\ k}_\alpha \rangle \quad \text{et}$$

$$\langle \alpha\ k_\alpha | j_z^2 | \alpha\ k_\alpha \rangle = \langle \overline{\alpha\ K}_\alpha | j_z^2 | \overline{\alpha\ K}_\alpha \rangle$$

Finalement, le terme diagonal de rotation est égal à $(I(I+1) - K^2_>)$ pour les états $K_>$ et $(I'(I'+1) - K^2_<)$ pour les états $K_<$.

L'expression (II-18) donnant les énergies des quasi-particules proton et neutron est indépendante du moment angulaire total. Sa contribution est

donc la même pour l'état $K_>$ et l'état $K_<$ puisque les états de quasi-particules et leurs renversés du sens du temps ont la même énergie : dégénérescence de Kramer.

L'expression (II-29) donne la contribution de V_{resid}. On voit aisément que, $K_>$ ne pouvant être nul, il n'y aura pas de contribution en $(-1)^I$.

En collectant tous les termes, on obtient :

$$< K_<|H|K_< > - < K_>|H|K_> > = \qquad \text{(III-22)}$$

$$\hbar^2/2\mathcal{J}\left[(K_< - K_>) - \delta_{K<,0}\,\pi_n\,\pi_p < \overline{\alpha_n k_n}|j_n^-|\alpha_n k_n >< \alpha_p k_p|j_p^+|\overline{\alpha_p k_p}>\right]$$

$$+ < \alpha_n k_n, \overline{\alpha_p k_p}|V|\alpha_n k_n, \overline{\alpha_p k_p} > - < \alpha_n k_n, \alpha_p k_p|V|\alpha_n k_n, \alpha_p k_p >$$

$$- \delta_{K,0}\,\pi_n\pi_p <\alpha_n k_n, \overline{\alpha_p k_p}|V|\overline{\alpha_n k_n}, \alpha_p k_p >.$$

On appelle couramment énergie de Gallagher-Moskowsky E_{GM} [13] le terme $<\alpha_n k_n, \overline{\alpha_p k_p}|V|\ \alpha_n k_n, \overline{\alpha_p k_p} > - < \alpha_n k_n, \alpha_p k_p|V|\alpha_n\ k_n, \alpha_p k_p>$

et énergie de Newby E_N le terme :

$$\pi_n\pi_p <\alpha_n k_n\ \overline{\alpha_p k_p}|V|\overline{\alpha_n k_n}\ \alpha_p k_p >$$

d'autre part, on appelle constante de découplage a_n (ou a_p)

$$a_n = - \pi_n < \alpha_n k_n|j_n^+|\overline{\alpha_n k_n} >.$$

Avec ces notations on a :

$$< K_<|H|K_< > - < K_>|H|K_> > = E_{GM} - \delta_{K,0}(-1)^I \Big[$$

$$E_N + \delta_{k_n,1/2}\,\delta_{k_p,1/2}\,\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\,a_n a_p\Big] + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}(K_< - K_>). \qquad \text{(III-23)}$$

(avec nos conventions de phase, dans toutes ces définitions, k_n et k_p sont tous les deux positifs).

Il est intéressant de remarquer que cette différence (III-23), ainsi que les termes E_{GM} et E_N ne dépendent pas du pairing.

De la même façon, quand on compare les valeurs moyennes de H entre des états de spins successifs I et de même $K_< = 0$: (I M $K_<$=0) et (I+1 M $K_<$=0), on obtient:

$$< K_<= 0|H|K_<= 0 >_I - < K_<=0|H|K_<=0 >_{I+1}$$

$$= 2(-1)^I\left[E_n + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} a_n a_p \delta_{k_n,1/2}\,\delta_{k_p,1/2}\right] - 2\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}(I+1) \qquad \text{(III-24)}$$

Dans le cas d'un couplage de Coriolis très faible, on peut assimiler les valeurs moyennes <IMK|H|IMK> aux énergies E(I,K) des états de bandes de rotations expérimentales et avoir ainsi, à partir des données expérimentales, des informations sur les termes E_{GM} et E_N. Ces données expérimentales sont de deux types :

- Les différences des énergies des têtes de bandes rotationnelles de doublets $K_>$ et $K_<$ construits sur le même couple d'états proton et neutron, dans le cas où $K_< \neq 0$; ceci donne accès aux énergies E_{GM}.

- Les différences d'énergie entre deux niveaux consécutifs (spin total I et I+1) dans une même bande de rotation construite sur $K_< = 0$. Dans le cas où les constantes de découplage sont connues, ceci donne accès aux énergies E_N.

Boisson et al. [13] ont extrait d'une façon semi-empirique une cinquantaine d'énergies E_{GM} et une vingtaine d'énergies de Newby E_N à partir de données expérimentales sur les noyaux dans la région des terres rares. Certaines énergies E_{GM} ou E_N peuvent être affectées d'une erreur systématique due, soit à la présence de couplages de Coriolis, soit à l'imprécision des données expérimentales. La règle de sélection empirique formulée par Gallagher-Moszkowski [42] spécifie qu'à grande déformation, l'énergie la plus basse des deux têtes de bande $K_<$ et $K_>$ sera celle où les particules neutrons et protons ont des spins parallèles :

$$E(K_<) - E(K_>) \gtrless 0 \text{ si } \Sigma_n = \Sigma_p$$

Ceci implique d'une part que les états Hartree-Fock soient des états de bon spin et d'autre part qu'on les connaisse. Ceci n'est en général pas le cas. En fait les spins sont déterminés à partir de calculs utilisant le modèle de Nilsson. Ceci est périlleux dans la mesure où les états propres d'un tel champ moyen correspondent souvent à un fort mélange de spins comme on le verra plus loin.

Néanmoins, si l'on procède de la façon simplifiée précédente, on trouve [13] que les énergies E_{GM} vérifient la règle de sélection empirique de Gallagher et Moskowski.

Pour chacun des noyaux étudiés dans la référence [13], nous avons effectué [20] des calculs self-consistents de type HF + BCS sur les coeurs voisins (voir figure 1), puis sélectionné pour ces noyaux les états individuels HF de proton et de neutron correspondant aux configurations semi-empiriques données dans les tableaux 3 et 4 et de la réf. [13].

On a calculé ensuite les éléments de matrice de type Gallagher-Moszkowski et de type Newby en décomposant les états HF sur la base asymptotique. On a également calculé les valeurs moyennes de la troisième composante du spin, S_z, pour chacun de ces états :

$$\Sigma_\alpha = \langle\alpha|S_z|\alpha\rangle = \sum_{ij} C_i^\alpha C_j^\alpha \langle\tau_j \Sigma_j N_{zj} N_j|S_z|N_i N_{zi} \Sigma_i \tau_i\rangle \qquad \text{(III-25)}$$

avec $\alpha = (n,p)$

Nous avons représenté sur la figure 2 les quantités E_{GM} ainsi calculées avec la force de Skyrme, et leurs valeurs "semi-empiriques" de la référence [13], en fonction de $|\Sigma_p - \Sigma_n|$.

Puisque nous avons accès à la valeur moyenne de la différence de spin-proton -neutron, nous avons pu confirmer théoriquement de façon quantitative la validité de la règle empirique de Gallagher-Moszkowski. En effet, les valeurs de E_{GM} que nous calculons sont linéairement corrélées à $|\Sigma_n - \Sigma_p|$. Si nous nous intéressons aux valeurs absolues de E_{GM} nous constatons que du côté des configurations à spins parallèles (à gauche dans la figure 2)($|\Sigma_n - \Sigma_p| \leqslant \frac{1}{2}$), nous reproduisons généralement très bien quantitativement les valeurs semi-empiriques. L'accord est légèrement moins bon pour les configurations à spins anti-parallèles ($|\Sigma_n - \Sigma_p| \sim 1$).

Comme on l'a déjà signalé, les configurations données dans les tableaux (3) et (4) de la référence [13] ne sont pas généralement des états purs, mais contiennent la plupart du temps soit un important couplage de Coriolis ou encore sont déterminés à partir de données expérimentales non complètement confirmées. C'est pourquoi, on ne s'intéressera, pour discuter de façon précise nos résultats, qu'aux seuls états isolés et bien confirmés expérimentalement.

Nous donnons ci-dessous tous les états de proton et de neutron sélectionnés dans différents coeurs et les composantes principales de leur décomposition sur la base de l'oscillateur harmonique déformé.

Noyau Gd^{158} :

$$3/2^+ \; p[441] = 59\% \; (441) + 14\% \; (211) + 12\% \; (611) + \ldots$$

$$5/2^+ \; p[413] = 82\% \; (413) + 7\% \; (422) + 6\% \; (613) + \ldots$$

$$3/2^- \; n[521] = 56\% \; (521) + 9\% \; (532) + 7\% \; (741) + \ldots$$

$$5/2^+ \; n[642] = 56\% \; (642) + 14\% \; (622) + 13\% \; (633) + \ldots$$

Noyau Dy^{162} :

$$3/2^+ \; p[411] = 57\% \; (441) + 15\% \; (211) + 12\% \; (611) + \ldots$$

$$5/2^+ \; p[413] = 81\% \; (413) + 6\% \; (422) + 6\% \; (613) + \ldots$$

$$5/2^+ \; n[642] = 54\% \; (642) + 14\% \; (622) + 13\% \; (633) + \ldots$$

Noyau Er^{166} :

$$7/2^+ \; n[633] = 65\% \; (633) = 5\% \; (624) + 8\% \; (853) + \ldots$$

$$7/2^- \; p[523] = 74\% \; (523) + 9\% \; (743) + \ldots$$

Noyau Er^{168} :

$$7/2^+ \; n[633] = 69\% \; (633) + 9\% \; (624) + 8\% \; (853) + \ldots$$

$$7/2^- \; p[523] = 76\% \; (523) + 10\% \; (743) + \ldots$$

Noyau Yb^{168} :

$7/2^+$ n[633] = 56% (633) + 14% (853) + 8% (624) + ...

$7/2^+$ p[404] = 74% (404) + 18% (604) + ...

Noyau Yb^{174} :

$5/2^-$ n[512] = 64% (412) + 10% (712) + 5% (312)...

$7/2^+$ n[633] = 67% (633) + 10% (624) + 9% (853)...

$9/2^+$ n[624] = 75% (624) + 6% (844) ...

$7/2^+$ p[404] = 87% (404) + 7% (604)...

$9/2^-$ p[514] = 83% (514) + 8% (714) + 6% (734)...

Noyau Hf^{178} :

$9/2^+$ n[624] = 77% (624) + 6% (844)...

$7/2^+$ p[404] = 86% (404) + 9% (604)...

Noyau W^{184} :

$7/2^-$ n[503] = 65% (503) + 14% (703) + 10% (303)...

$7/2^+$ p[404] = 85% (404) + 8% (604)...

$5/2^+$ p[402] = 58% (402) + 17% (202) + 18% (602)...

Noyau Os^{188} :

$7/2^-$ n[503] = 46% (503) + 15% (303) + 25% (703)...

$9/2^-$ n[505] = 81% (605) + 12% (705) ...

$5/2^+$ p[402] = 36% (402) + 27% (602) + 25% (202)

$9/2^-$ p[514] = 69% (514) + 19% (714) + 8% (734)...

On a comparé dans les tableaux 2 et 3 les valeurs théoriques et expérimentales des énergies E_{GM} et E_N.

Nos calculs reproduisent correctement les énergies E_{GM} expérimentales (c'est-à-dire en moyenne à 100 keV près). On peut noter cependant que les valeurs théoriques sont presque toujours plus élevées que les valeurs expérimentales. En revanche, les énergies E_N sont nettement moins bien reproduites. En particulier dans le cas où les spins des particules sont anti-parallèles (par exemple $|\Sigma_n - \Sigma_p| > 0,8$) les termes de Newby calculés sont plus faibles que les valeurs expérimentales, ce qui peut être expliqué par l'absence du terme tenseur dans la force de Skyrme.

Noyaux	n	p	$S_n - S_p$	$E_{GM}(SK)$	$E_{GM}(E)$
Tb^{158}	$\frac{3-}{2}[521]$	$\frac{3+}{2}[411]$	$-0,105^{(1)}$	$+220,7^{(1)}$	+ 133
Tb^{160} + 93	$\frac{5+}{2}[642]$	$\frac{3+}{2}[411]$	$-0,11^{(3)}$ $-0,105^{(2)}$	$+50,8^{(3)}$ $+40,6^{(2)}$	
Lu^{174}	$\frac{7+}{2}[633]$ $\frac{5-}{2}[512]$	$\frac{7+}{2}[404]$ $\frac{7+}{2}[514]$	$0,85^{(1)}$ $-0,04^{(1)}$	$-6,7^{(1)}$ $+191,2^{(1)}$	- 90 + 168
Lu^{176}	$\frac{9+}{2}[644]$	$\frac{7+}{2}[404]$	$0,87^{(2)}$ $0,90^{(3)}$	$-0,5^{(2)}$ $-11,2^{(3)}$	- 130
Ta^{182}	$\frac{7}{2}[503]$	$\frac{7+}{2}[404]$	$0,96^{(2)}$	$+34,6^{(2)}$	- 123
Re^{186}	$\frac{5+}{2}[402]$	$\frac{7-}{2}[503]$	$-0,01^{(3)}$ $-0,02^{(2)}$	$+415^{(3)}$ $+393,9^{(2)}$	+ 208
Re^{188}	$\frac{5+}{2}[402]$	$\frac{7-}{2}[503]$	$-0,02^{(4)}$	$+393,9^{(4)}$	+ 209

(1) = A [(N+1),(Z-1)] (3) = A [(N-1),(Z-1)]

(2) = A [(N+1),(Z+1)] (4) = A [(N-1),(Z+1)]

Tableau 2

Eléments de matrice $E_{GM}(SK)$ calculés avec l'interaction de Skyrme SIII, et valeurs empiriques $E_{GM}(E)$ correspondantes. $S_n - S_p$ est la différence des spins moyens calculés.

Les indices ((1),(2),(3) ou (4)) renvoient au coeur pair-pair sur lequel ces calculs ont été effectués.

Noyaux	n	p	$S_n - S_p$	N_e(SK)	N_e(E)
Eu^{156}	$\frac{5+}{2}[642]$	$\frac{5+}{2}[413]$	0,754	22,90	+ 3
Tb^{158}	$\frac{3-}{2}[521]$	$\frac{3+}{2}[411]$	- 0,39(1)	-171,50(1)	+ 8
Tb^{160}	$\frac{5+}{2}[642]$	$\frac{5+}{2}[413]$	0,754(3) 0,745(2)	22,90(3) 25,71(2)	- 3
Ho^{166}	$\frac{7+}{2}[633]$	$\frac{7+}{2}[523]$	0,05(2) 0,045(4)	-211,9(2) -202,1(4)	- 32
Lu^{170}	$\frac{7+}{2}[633]$	$\frac{7+}{2}[404]$	0,854(3)	23,20(3)	+ 42
Lu^{174}	$\frac{7+}{2}[633]$	$\frac{7+}{2}[404]$	0,852(1)	21,81(1)	+ 35
Ta^{176}	$\frac{7+}{2}[633]$	$\frac{7+}{2}[404]$			+ 42
Ta^{182}	$\frac{7-}{2}[503]$	$\frac{7+}{2}[404]$	0,96(2)	4,7(2)	+ 26
Ta^{188}	$\frac{9-}{2}[505]$	$\frac{9+}{2}[514]$	-0,95(4)	5,3(4)	+ 54

Tableau 3

Eléments de matrice E_N(SK) calculés avec l'interaction de Skyrme SIII et valeurs empiriques E_N(E) correspondantes. $S_n - S_p$ est la différence des spins moyens calculés.

Les indices ((1),(2),(3) ou (4)) renvoient au coeur pair-pair sur lequel ces calculs ont été effectués.

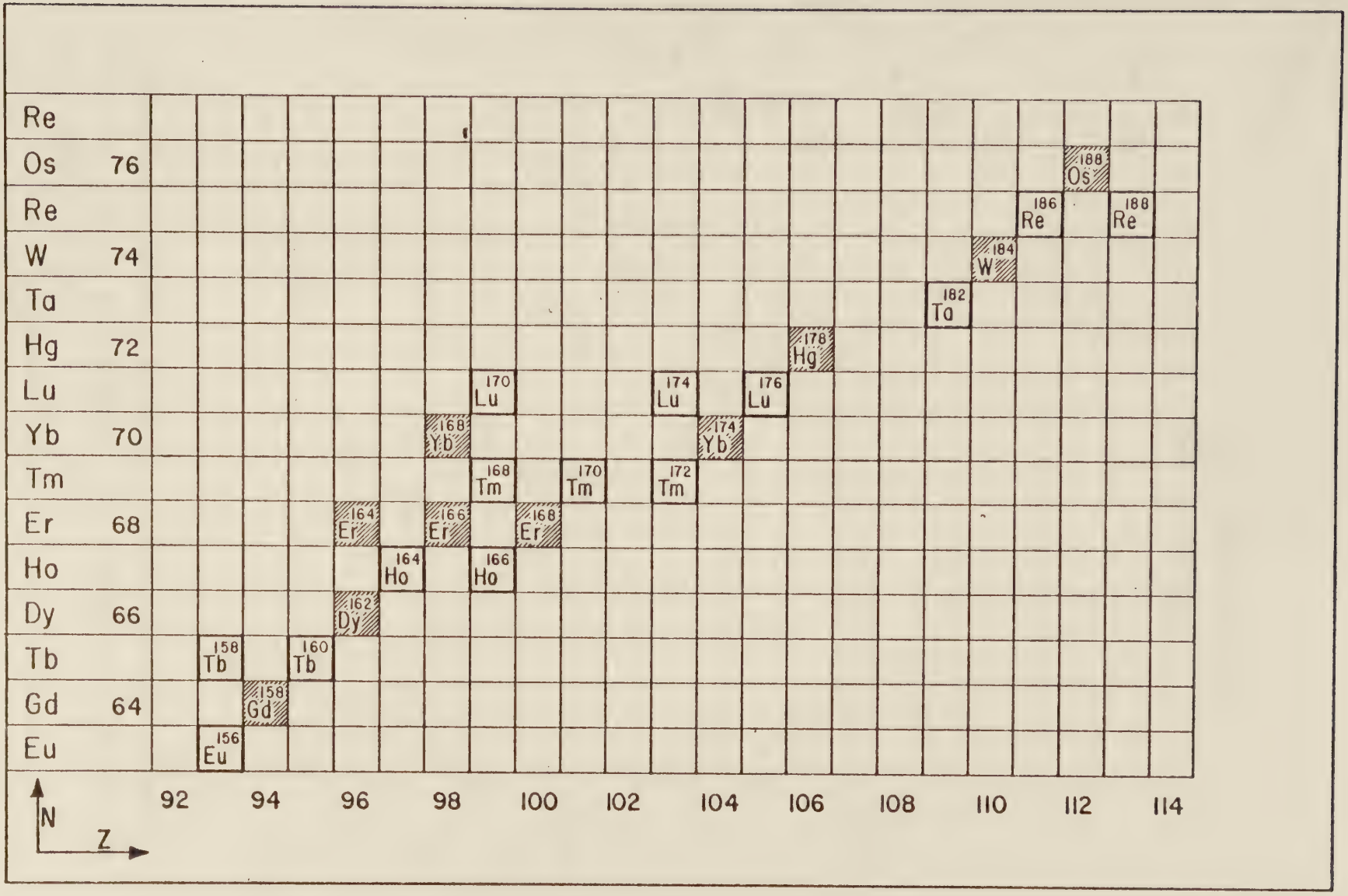
Re
Os 76
Re
W 74
Ta
Hg 72
Lu
Yb 70
Tm
Er 68
Ho
Dy 66
Tb
Gd 64
Eu
156 Eu
158 Tb
158 Gd
160 Tb
162 Dy
164 Er
164 Ho
166 Er
166 Ho
168 Yb
168 Tm
168 Er
170 Lu
170 Tm
172 Tm
174 Lu
174 Yb
176 Lu
178 Hg
182 Ta
184 W
186 Re
188 Os
188 Re
92 94 96 98 100 102 104 106 108 110 112 114
N
Z

Figure 1

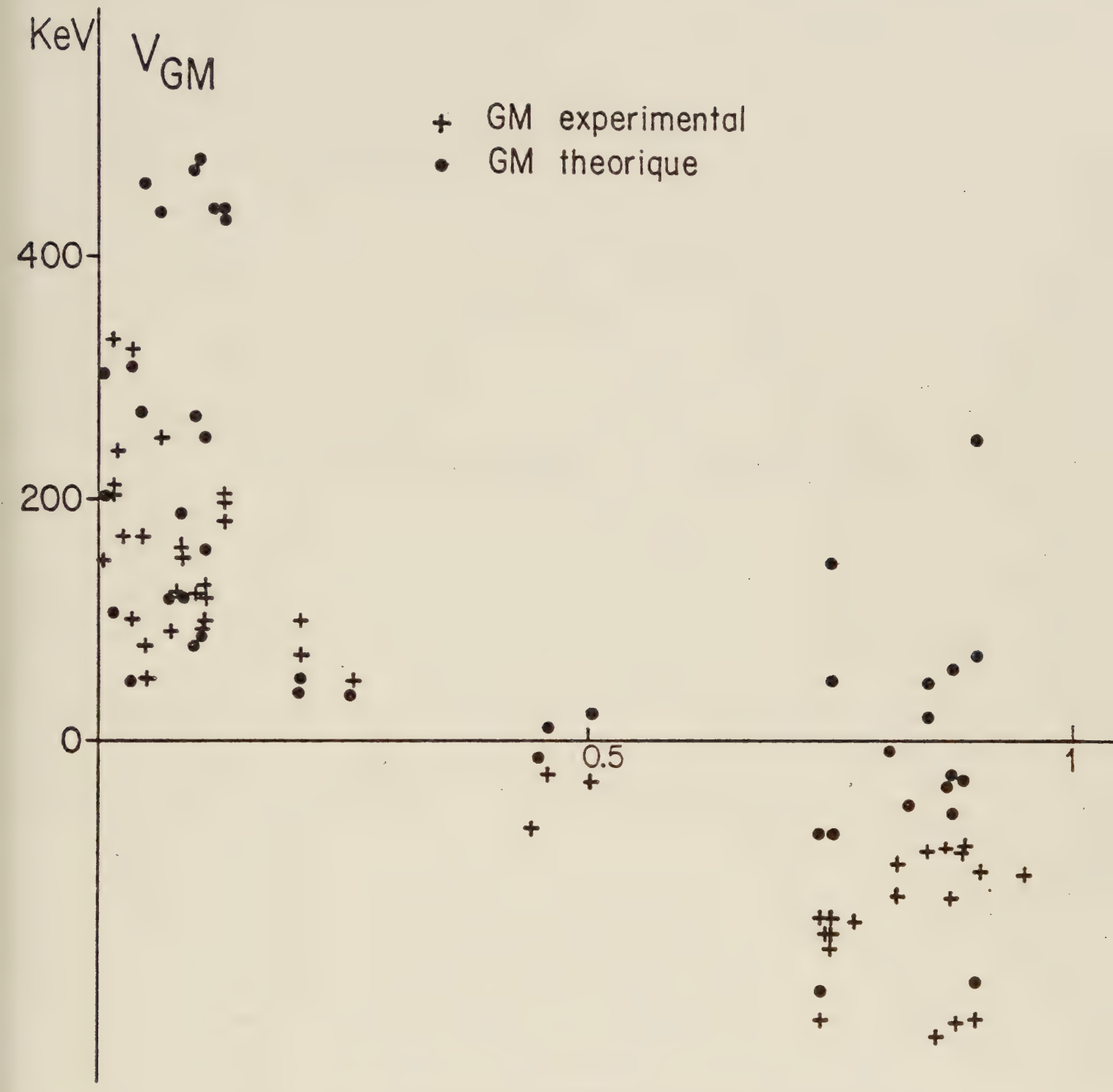

Figure 2

Comparaison entre les énergies E_{GM} (correspondant aux éléments de Gallagher--Moszkowski) tirées de l'expérience et théoriques en fonction de la quantité $\left|\Sigma_n - \Sigma_p\right|$.

Q U A T R I E M E C H A P I T R E

IV - ETUDE DU NOYAU ^{238}Np

1) Introduction

La dynamique du rotor axial à laquelle nous réduisons la partie collective du Hamiltonien trouve sa justification la plus solide dans des régions de noyaux bien déformés, tels les actinides. Par ailleurs, cette région a fait l'objet d'études théoriques intensives : les propriétés globales expérimentales (énergie totale, moments multipolaires statiques et rayons carrés moyens) de quinze noyaux pairs-pairs ont été parfaitement reproduits dans des calculs HF + BCS (20). A titre d'exemple, on montre dans le tableau (4), les résultats obtenus pour les noyaux $^{236,238}U$ et les noyaux $^{238,240}Pu$, en comparaison avec les données expérimentales correspondantes.

De même, on a pu rendre compte (36) dans le cadre d'un modèle Rotor-plus-une-quasi-particule, des propriétés spectroscopiques de plus de vingt noyaux impairs en proton ou en neutron de cette région ($229 < A < 241$). Outre les spectres d'énergie, des moments multipolaires et des probabilités de transitions réduites ont pu être reproduites avec succès. Les valeurs absolues des probabilités de transitions M1 et E2 intrabandes sont calculées en bon accord avec les données expérimentales. Pour les transitions interbandes $\Delta K = 1$ et $\Delta K = 2$ qui constituent des tests très fins pour les fonctions d'onde individuelles, les calculs donnent le bon ordre de grandeur pour les transitions M1 (reproduction à un facteur 10 au plus).

Les moments magnétiques dipolaires et quadrupolaires électriques Q_2 calculés reproduisent correctement les données, en fait, de manière aussi satisfaisante que dans l'approche phénoménologique de Chasman et al (49).

Ces résultats ont confirmé pour ces noyaux la validité de nos hypothèses (Rotor axial) et la qualité des fonctions d'onde individuelles résultant de nos calculs HF + BCS utilisant l'interaction de Skyrme SIII.

Il était donc naturel pour un premier test du modèle Rotor-plus-deux-quasi-particules de tenter de décrire un noyau de cette région.

Nous avons choisi le noyau ^{238}Np. En effet, différentes études expérimentales (43) ont fourni un schéma très détaillé de ce noyau, jusqu'à environ 600 keV . Ce schéma résulte :

1) de réactions (d,p) avec des deutons de 12 MeV,

2) de réactions (n,γ) de capture de neutrons thermiques sur le noyau ^{237}Np,

3) d'études de décroissance α du noyau ^{242m}Au

A partir de spectres à une particule issus du modèle de Nilsson, les auteurs de la référence (13) ont pu identifier neuf bandes rotationnelles.

Dans le but de comparer ces approches purement phénoménologiques avec nos calculs microscopiques, il importe tout d'abord de tester pour les noyaux impliqués, les spectres à une particule que nous avons obtenus. A cet effet, nous montrons sur les figures (3) et (4), les spectres calculés (36) pour les noyaux impairs en neutron et en proton, voisins du noyau ^{238}Np (les noyaux ^{239}Np et ^{239}Pu).

Ces résultats proviennent de calculs de type rotor-plus-une-quasi-particule appliqués au coeur ^{238}U (resp. ^{240}Pu) plus un quasi-proton pour les niveaux du noyau ^{239}Np et au coeur ^{238}Pu (resp. ^{240}Pu) plus un quasi-neutron pour les niveaux du noyau ^{239}Pu.

Dans les deux cas, les bandes rotationnels expérimentales sont retrouvées et correctement assignées jusqu'à environ 1 MeV.

2) Quelques détails de calcul

Nous avons effectué des calculs de type HF + BCS pour les minima des courbes d'énergie de déformation des noyaux $^{236,238}U$ et $^{238,240}Pu$ (20).

Les valeurs des "gaps" d'appariement proton et neutron déduites des différences de masse des isotopes pairs-impairs sont données dans le tableau (5). On donne également dans ce même tableau les paramètres de déformations b et q de la base, qui minimisent les énergies des solutions H.F.

Les seuls autres paramètres non libres de notre approche sont les moments d'inertie $\mathcal{J}(R)$ de chacun de ces coeurs pairs-pairs.

Pour les calculs à moment d'inertie variable, nous avons extrapolé jusqu'aux niveaux de moments angulaires $20\hbar$, les paramètres d'inertie $\hbar^2/2\mathcal{J}(R)$ tirés des niveaux expérimentaux allant jusqu'à l'état 12^+ dans les noyaux ^{236}U et ^{238}Pu. Pour les noyaux ^{236}U et ^{238}Pu, les énergies des états de la bande fondamentale sont connues jusqu'au spin $20\hbar$ au moins. Les valeurs retenues pour ces moments d'inertie sont reportées sur la figure (5).

Les états individuels de proton et de neutron des solutions d'équilibre H.F. sont développées sur une base d'oscillateur harmonique

sphérique, via la base asymptotique comprenant 12 couches majeures (soit un moment orbital maximum $l = 12\hbar$, et un moment angulaire $j = (25/2)\hbar$.

Les effets de la troncature de la base sur l'énergie totale ont été évalués à partir des solutions HF exactes dans le cas de la symétrie sphérique. Ils ont ainsi été estimés à environ 8,5 MeV pour le noyau ^{240}Pu en supposant qu'ils sont indépendants de la déformation.

On a pris en compte dans le modèle Rotor-plus-deux-quasi-particules et pour chaque coeur pair-pair tous les états de proton et de neutron situés à ± 2 MeV des niveaux de Fermi respectifs. Une sélection plus large n'a fait apparaître des nouvelles bandes qu'au delà de 0,6 MeV de l'état fondamental, bandes qui ne sont pas encore identifiées expérimentalement.

Bien que d'importants mélanges d'états de base soient généralement obtenus, nous avons, suivant l'usage, étiqueté ces états individuels par les nombres quantiques asymtotiques correspondant à leur composante majeure sur les états de la base de l'oscillateur harmonique déformé soit :

$$K^{\pi} \alpha \left[Nn_z\Lambda\right] \quad \text{avec } \alpha = p \text{ ou } n$$

$$K = \left| \Lambda+\Sigma \right| \geqslant 0 \text{ et } \pi \text{ la parité de l'état.}$$

De la même façon on a noté les états neutron-proton de la base du noyau impair-impair étudié par le couple de leur composante majeure sur la base asymptotique. On définira de même les états propres du Hamiltonien par le couple précédemment défini correspondant à la composante majeure sur la base standard. Conformément à la notation employée au chapître II, on parlera de doublet de bandes rotationnelles $K_>$ et $K_<$ respectivement obtenues en ajoutant et en soustrayant les projections k_n et k_p des moments angulaires de neutron et proton.

Pour le noyau étudié ^{238}Np, nous avons considéré les états de neutron et de proton suivants :

$$\tfrac{1^+}{2}n\,[631] \quad , \tfrac{3^+}{2}n\,[631] \quad , \tfrac{5^+}{2}n\,[622] \quad , \tfrac{7^+}{2}n\,[624] \quad , \tfrac{7^-}{2}n\,[743]$$

$$\tfrac{1^+}{2}p\,[630] \quad , \tfrac{1^+}{2}p\,[600] \quad , \tfrac{3^+}{2}p\,[631] \quad , \tfrac{5^+}{2}p\,[642] \quad , \tfrac{1^-}{2}p\,[330]$$

$$\tfrac{5^-}{2}p\,[523].$$

Ces états se couplent entre eux pour former une base standard de 60 états au maximum pour chaque valeur du spin total. Parmi ces états, 36 ont une parité positive et sont tels que $0 \leqslant K \leqslant 6$ et 24 états ont une parité négative et sont tels également que : $0 \leqslant K \leqslant 6$.

Sur l'UNIVAC 1110 du Centre Paris-Sud d'informatique de l'Université PARIS XI à ORSAY, le calcul de constitution et de diagonalisation des matrices énergie de moment angulaire total I allant de 0 à 6 nécessite 1 heure et 20 minutes d'utilisation de la mémoire centrale.

Dans le cas d'un calcul à moment d'inertie constant le même calcul prend environ 3 minutes. Enfin le calcul d'un élément de matrice $\langle np|V|n'p'\rangle$ prend en moyenne 6 minutes pour une base d'états à une particule HF comportant 13 couches majeures. C'est pour cela que les calculs ont été limités, dans un premier temps, aux seuls éléments diagonaux de l'interaction résiduelle proton-neutron.

3) Les résultats pour le noyau ^{238}Np

Nous ne discuterons que les résultats correspondant aux états propres ayant une énergie inférieure ou égale à 0,6 MeV et de spin total I compris entre 0 et 6.

On remarque tout d'abord que les seuls états individuels de neutron et de proton contribuant à cette partie du spectre sont :

$\frac{1}{2}^+ n[631]$: (E = -6,02) (V^2 = 0,316)
= 21% (631) + 12% (851) + 8% (611)

$\frac{5}{2}^+ n[622]$: (E = -5,39, V^2 = 0,088)
= 26% (622) + 18% (422) + 16% (822)

$\frac{7}{2}^+ n[624]$: (E = -5,49, V^2 = 0,105)
= 61% (624) + 10% (824) + ...

$\frac{7}{2}^- n[743]$: (E = -6,38, V^2 = 0,596)
= 37% (743) + 18% (963) + 16% (723) + ...

$\frac{3}{2}^+ p[631]$: (E = -6,05, V^2 = 0,888)
= 23% (631) + 19% (871) + 9% (651)

$\frac{5+}{2}$ p[642] : (E = -4,88, v^2 = 0,329)
= 24% (642) + 23% (862) + 18% (622)

$\frac{5-}{2}$ p[523] : (E = -5,64, v^2 = 0,778)
= 55% (523) + 13% (723) + (12% (743) + ...

où E est l'énergie HF (en MeV) de l'état individuel et v^2 sa probabilité d'occupation.

Nous avons également effectué des calculs de type Rotor-plus-deux-quasi-particules avec des moments d'inertie constants $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(2)$ et nous les avons comparés aux résultats obtenus avec $\mathcal{J}(R)$ variables. Dans les deux cas, on retrouve les mêmes bandes de rotation à peu près à la même énergie. Les deux spectres d'énergie du noyau ^{238}Np, obtenus sans termes d'interaction proton-neutron V_{pn}, à partir du noyau ^{238}Pu sont comparés sur la figure 6. La seule bande de rotation qui apparaît dans un calcul à $\mathcal{J}(R)$ constant et qui n'apparaît pas dans les calculs à moment d'inertie variable est construite sur la configuration $[\frac{7+}{2}$ n(743) + $\frac{5-}{2}$ p(523)] avec une tête de bande apparaissant à 344 keV.

Les résultats obtenus avec les coeurs ^{238}Pu et ^{240}Pu sont plus satisfaisants (voir fig.7) que ceux obtenus avec les coeurs ^{236}U et ^{238}U.

Dans ce dernier cas en effet, si les mêmes bandes que pour les coeurs ^{238,240}Pu sont trouvées dans un intervalle d'énergie de l'ordre de 350 keV, on note des perturbations importantes de l'ordre relatif des têtes de bandes par rapport aux données expérimentales. Ces perturbations semblent liées à l'existence indue de couplage de Coriolis qui rend complètement arbitraire le choix de l'étiquette de ces états. Cette meilleure description des états du Neptunium en terme d'états de quasi-particules sur un coeur de Plutonium plutôt que sur un coeur d'Uranium confirme ce qui avait été déjà trouvé pour les isotopes impairs cf ref.(36).

Dans ce qui suit nous discuterons plus en détail des résultats obtenus avec le coeur ^{238}Pu. Toutes les bandes rotationnelles trouvées expérimentalement ont été reproduites et leur identification a été confirmée. Les bandes théoriques jusqu'à environ 1 MeV, sont très faiblement couplées par le terme de Coriolis. En effet, les têtes de bandes sont pures à plus de

90% comme on peut le voir dans le tableau 6 où les composantes majeures des têtes de bandes rotationnelles obtenues au-dessous de 0,6 MeV sont reportées.

Quand le spin total augmente les niveaux d'une même bande perdent un peu de leur pureté et peuvent atteindre un taux de mélange de 40%. A titre d'exemple on donne dans le tableau 7 le taux de mélange de Coriolis pour chaque niveau de la bande fondamentale étiquetée $[\frac{1}{2}^+ n(631) - \frac{5}{2}^+ p(642)]$. La figure 8 présente l'ensemble du spectre théorique en comparaison avec les données expérimentales. Les niveaux indicés (th.1) correspondent à des calculs n'incluant pas l'interaction résiduelle entre les neutrons et les protons de valence.

En revanche, pour les niveaux indicés (th.2) on a tenu compte de toutes les contributions diagonales de V_{resid}. Nous discuterons d'abord les résultats obtenus sans termes d'interaction résiduelle.

- Le calcul donne une dégénérescence en énergie, des deux bandes $K_>$ et $K_<$ du doublet $[\frac{1}{2}^+(631), \frac{5}{2}^+ p\ 642)]$, qui n'existe pas expérimentalement. Par ailleurs, la tête de bande $K_<$ de ce doublet n'est pas trouvée comme étant l'état fondamental.

- La séquence des deux bandes du doublet construit sur les états individuels $[\frac{1}{2}^+ n(631), \frac{5}{2}^- p(523)]$ est bien reproduite. Cependant, les têtes de bandes calculées sont plus basses en énergie que l'expérience. La tête de bande $K_< = 2^-$ apparaît à -13 keV et $K_> = 3^-$ apparaît à - 10 keV.

- Pour le doublet construit sur $[\frac{7}{2}^- n(743), \frac{5}{2}^+ p(642)]$, seule la bande $K_> = 6^-$ a été observée à 300 keV. Nos calculs prévoient une bande $K_> = 1^-$, dont le premier niveau 1^- serait situé à 160 keV.

- Les deux doublets ($K_< = 0$) construits sur les états individuels $[\frac{5}{2}^+ n\ (622), \frac{5}{2}^+ p\ (642)$ et $\frac{5}{2}^- p(523)]$ sont trouvés, expérimentalement, fortement perturbés. Nos calculs, sans termes d'interaction résiduelle, dans aucun de ces deux cas, ne reproduisent l'état 1^- comme tête de bande.

L'adjonction des éléments de matrices de l'interaction V_{resid} n'affecte pas le bilan global : on retrouve les 5 doublets expérimentaux bien connus. Par contre, les déplacements des têtes de bandes et les perturbations des deux bandes $K_< = 0$ sont spectaculaires.

- Le doublet $[\frac{1}{2}^+ n(631), \frac{5}{2}^+(642)]$:

grâce à la remontée du doublet $[\frac{1}{2}^+ n(631), \frac{5}{2}^- p(523)]$ l'état calculé d'énergie la plus basse est bien un état 2^+ et la tête de bande $K_> = 3^+$ se déplace (E_{GM} = 44 keV) de telle sorte que l'écart expérience-théorie est réduit de 87 keV à 40 keV. On prévoit un niveau 6^+ dans la bande $K_<$ à 157 keV.

- Le doublet $[\frac{1}{2}^+ n(631), \frac{5}{2}^- p(523)]$: l'adjonction de V_{resid} diagonal conduit à un déplacement en énergie des têtes de bandes, dans le bon sens et avec le bon ordre de grandeur. L'énergie E_{GM} pour ce doublet est de l'ordre de 49,8 keV.

- Le doublet $[\frac{7}{2}^- n(743), \frac{5}{2}^+ p(642)]$: V_{resid} remonte la bande $K_<$ de 170 keV. On prévoit le premier niveau 1^- à 330 keV. L'énergie E_{GM} est égale à 202,4 keV.

- Le doublet $[\frac{5}{2}^+ n(622), \frac{5}{2}^- p(523)]$: on retrouve une séquence perturbée pour la bande $K_< = 0$, même s'il subsiste un léger écart en valeur absolue de la tête de bande 1^-, et le premier niveau 5^- de la bande $K_>$ est prévu à 540 keV. L'énergie de Newby E_N est égale à = 40,5 keV et l'énergie E_{GM} à 40,4 keV.

- Le doublet $[\frac{5}{2}^+ n(632), \frac{5}{2}^+ p(642)]$: pour ce doublet aussi, on retrouve la séquence perturbée et l'accord en valeur absolue de l'énergie est meilleur. On prévoit le premier niveau 1^+ de la bande $K_<$ à 394 keV et le premier niveau 5^+ de la bande $K_>$ à 406 keV
L'énergie E_N est égale à 54,4 keV et l'énergie E_{GM} à 47,2 keV.

De nombreuses raies de faible intensité autour de 250 keV et entre 300 et 500 keV ont été observées expérimentalement mais n'ont pu être placées dans le schéma de niveux. De plus certains états observés n'ont pas pu recevoir d'étiquette. Or les calculs de type Rotor plus deux quasi-particules effectués pour ^{238}Np prédisent quatre autres doublets au-dessous de 500 keV que nous n'avons pas reportés dans la figure 1.

Pour l'état observé à 250 keV, nous proposons l'état $\left[\frac{7}{2}^{-}n(743), \frac{5}{2}^{-}p(523)\right]$ dont les têtes de bandes $K_<$ et $K_>$ apparaissent respectivement à 128 keV et 162 keV où l'on a tenu compte des contributions diagonales de V_{resid} (E_{GM} = -23 keV).

Nous avons obtenu deux autres doublets apparaissant entre 300 et 500 keV :

- l'un construit sur $\left[\frac{7}{2}^{+}n(624), \frac{5}{2}^{+}p(642)\right]$ et dont les têtes de bandes $K_<$ et $K_>$ sont calculées respectivement à 332 et 322 keV. L'énergie E_{GM} est égale à 13.3 keV.

- l'autre bâtie sur $\left[\frac{1}{2}^{+}n(631), \frac{3}{2}^{+}p(631)\right]$ et tel que la tête de bande $K_<$ a une énergie de 490 keV et la tête de bande $K_>$ a une énergie de 440 keV. L'énergie E_{GM} est égale à 41.23 keV.

En conclusion nos calculs reproduisent parfaitement les bandes observées et fournissent des candidats probables pour trois doublets de bandes non encore complètement confirmées expérimentalement.

Ces bons résultats ont été obtenus malgré le caractère limité de l'introduction de l'interaction résiduelle. Ceci confirme donc la validité des fonctions d'onde individuelles d'une part et la qualité de la force effective nucléon-nucléon d'autre part.

Noyaux	E^{cal}	E^{exp}	r^{cal}	r^{exp}	Q_2^{cal}	Q_2^{exp}	Q_4^{cal}	Q_4^{exp}
^{236}U	-1786.2	-1790.4	5.907	5.847	10.30	10.80 ± .07	0.99	1.30 ± .22
^{238}U	-1797.4	-1801.7	5.920	-	-	11.12 ± .07	0.92	0.83 ± .22
^{238}Pu	-1798.8	-1801.3	5.944	-	-	11.27 ± .08	1.22	1.38 ± .25
^{240}Pu	-1809.0	-1813.5	5.952	-	-	11.58 ± .08	1.08	1.15 ± .28

Tableau 4

Comparaison des énergies de liaison (en Mev), des rayons de charges (en fm), des moments quadrupolaires (en barn) et hexa décapolaires (en b^2) expérimentaux et théoriques, obtenus à partir des calculs HF + BCS et l'interaction SIII.

Noyaux	b	q	n	p
$^{236}_{92}U_{144}$	.485	1.275	.637	.912
$^{238}_{92}U_{146}$	.485	1.28	.604	.850
$^{238}_{94}Pu_{144}$	.514	1.23	.598	0.735
$^{240}_{94}Pu_{146}$	.489	1.25	.565	0.763

Tableau 5

Paramètres de déformations b et q (b en fm^{-1}) et valeurs (en MeV) des gaps d'appariements pour les protons et les neutrons, obtenus avec des calculs HF + BCS et l'interaction SIII.

Asg exp.	I $k_<$	I $k_>$
$[\frac{5+}{2}n(622), \frac{5+}{2}p(642)]$	0^+ = 99 %	5^+ = 94 %
$[\frac{1+}{2}n(631), \frac{5+}{2}p(642)]$	2^+ = 97 %	3^+ = 88 %
$[\frac{1+}{2}n(631), \frac{5-}{2}p(523)]$	2^- = 99 %	3^- = 90 %
$[\frac{5+}{2}n(622), \frac{5-}{2}p(523)]$	0^- = 100%	5^- = 98 %
$[\frac{7-}{2}n(743), \frac{5+}{2}p(642)]$	1^- = 100%	6^- = 95 %
$[\frac{7+}{2}n(624), \frac{5-}{2}p(523)]$	1^- = 99 %	6^- = 99 %
$[\frac{7-}{2}n(743), \frac{5-}{2}p(523)]$	1^+ = 100%	6^+ = 100%
$[\frac{7+}{2}n(624), \frac{5+}{2}p(642)]$	1^+ = 99 %	6^+ = 93 %
$[\frac{1+}{2}n(631), \frac{3+}{2}p(631)]$	1^+ = 97 %	2^+ = 82 %

Tableau 6

Les assignations expérimentales (Asg exp) des doublets de bandes rotationnelles du noyau ^{238}Np et les composantes majeures théoriques des têtes de bandes.

I	$[\frac{1+}{2}n(631), \frac{5+}{2}p(642)]$, $K_< = 2^+$
2	97 %
3	85 %
4	75 %
5	67 %
6	60 %

Tableau 7

Les composantes majeures théoriques de la bande fondamentale du ^{238}Np, jusqu'au spin 6^+.

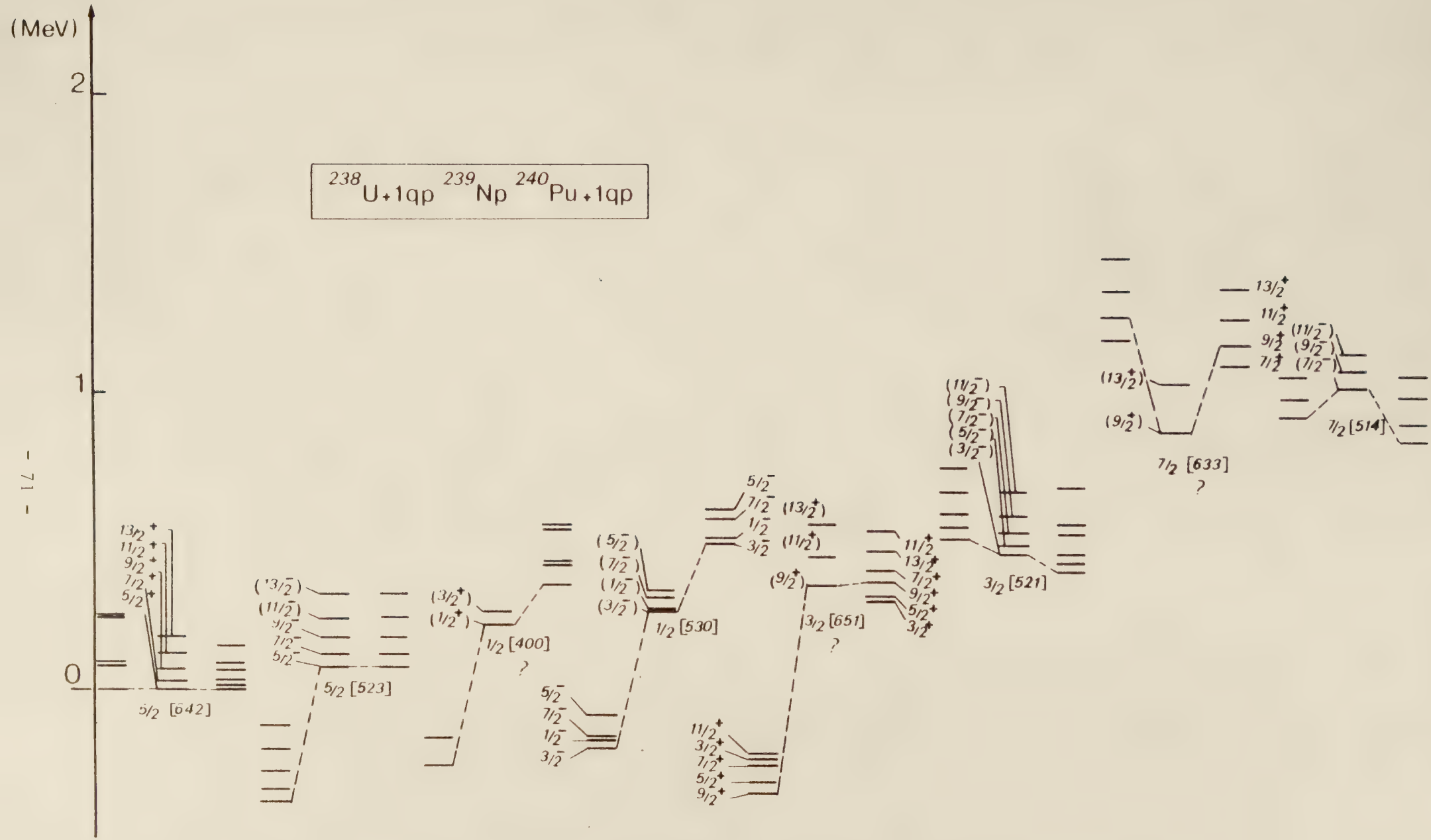

Figure 3

Comparaison entre les schémas de niveaux expérimentaux et théoriques du noyau impair ^{239}Np.

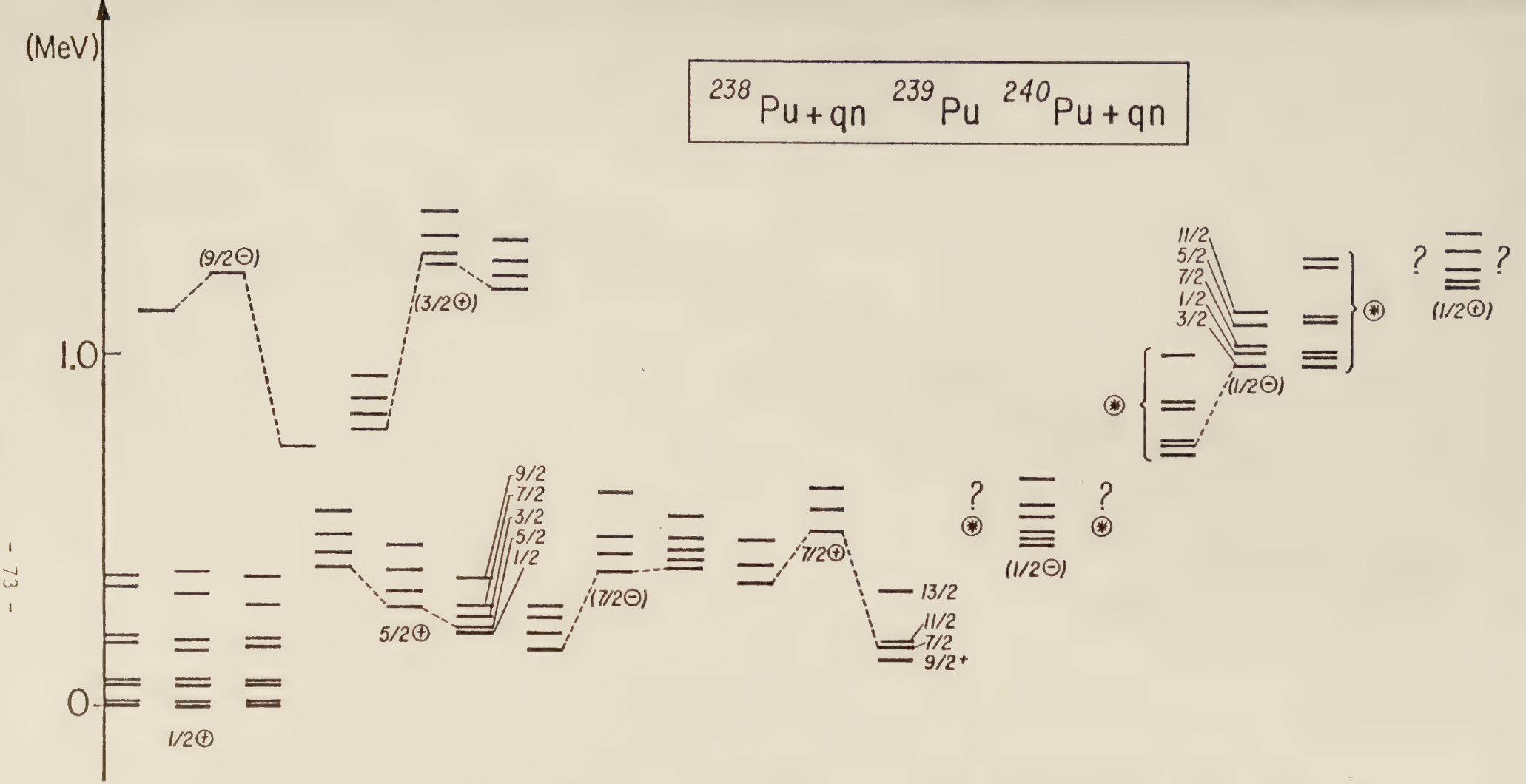

Figure 4

Comparaison entre les schémas de niveaux expérimentaux et théoriques du noyau impair ^{239}Pu.
Les valeurs théoriques sont obtenues à partir de calculs rotor + 1 qp sur les noyaux $^{238,240}Pu$.

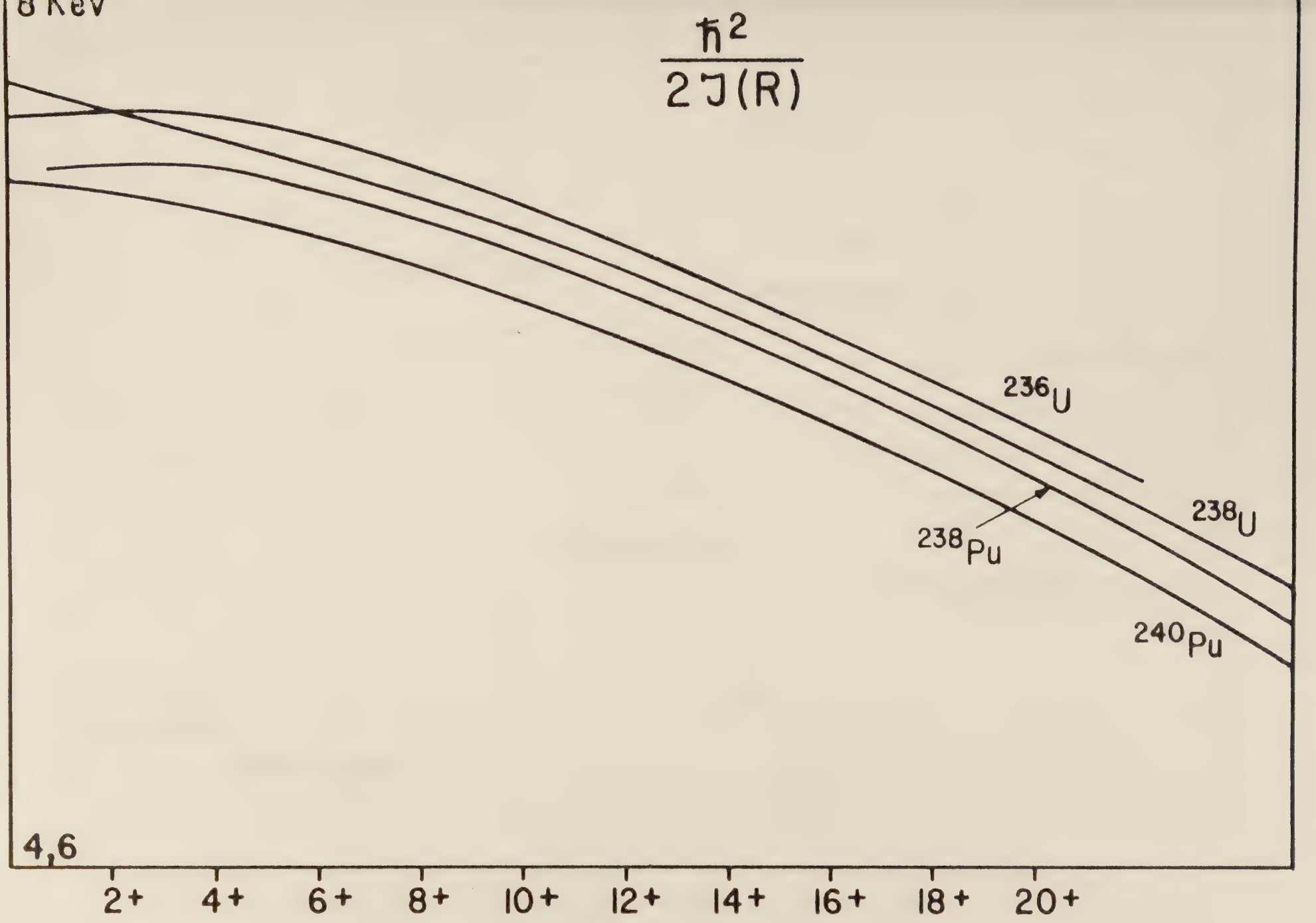
8 KeV
$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}(R)}$
^{236}U
^{238}U
^{238}Pu
^{240}Pu
4,6
2+
4+
6+
8+
10+
12+
14+
16+
18+
20+

Figure 5

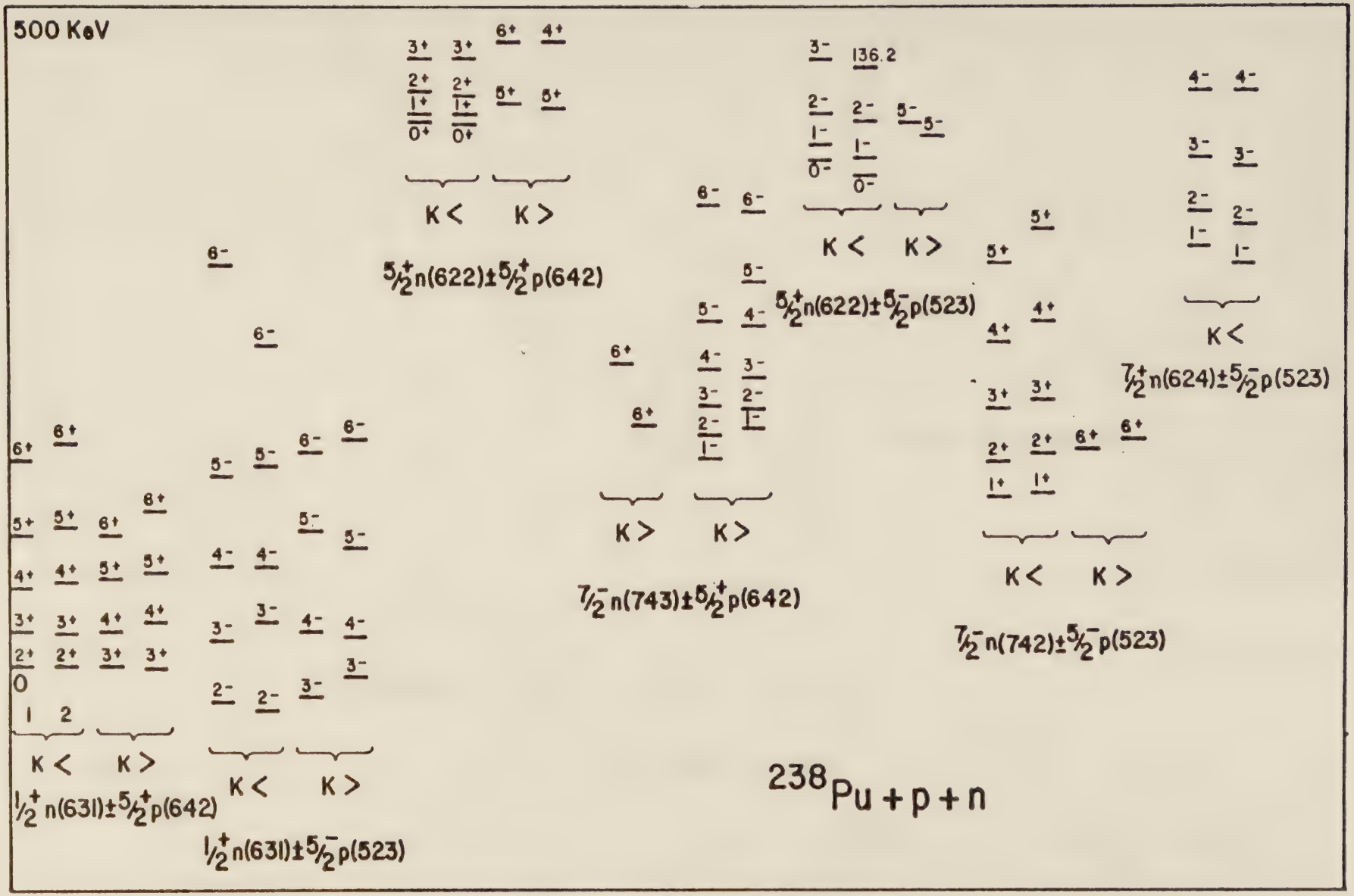

Figure 6

Comparaison des schémas de niveaux théoriques du noyau ^{238}Np obtenus avec des calculs rotor + 2 qps à moments d'inertie variables et moments d'inertie constants.

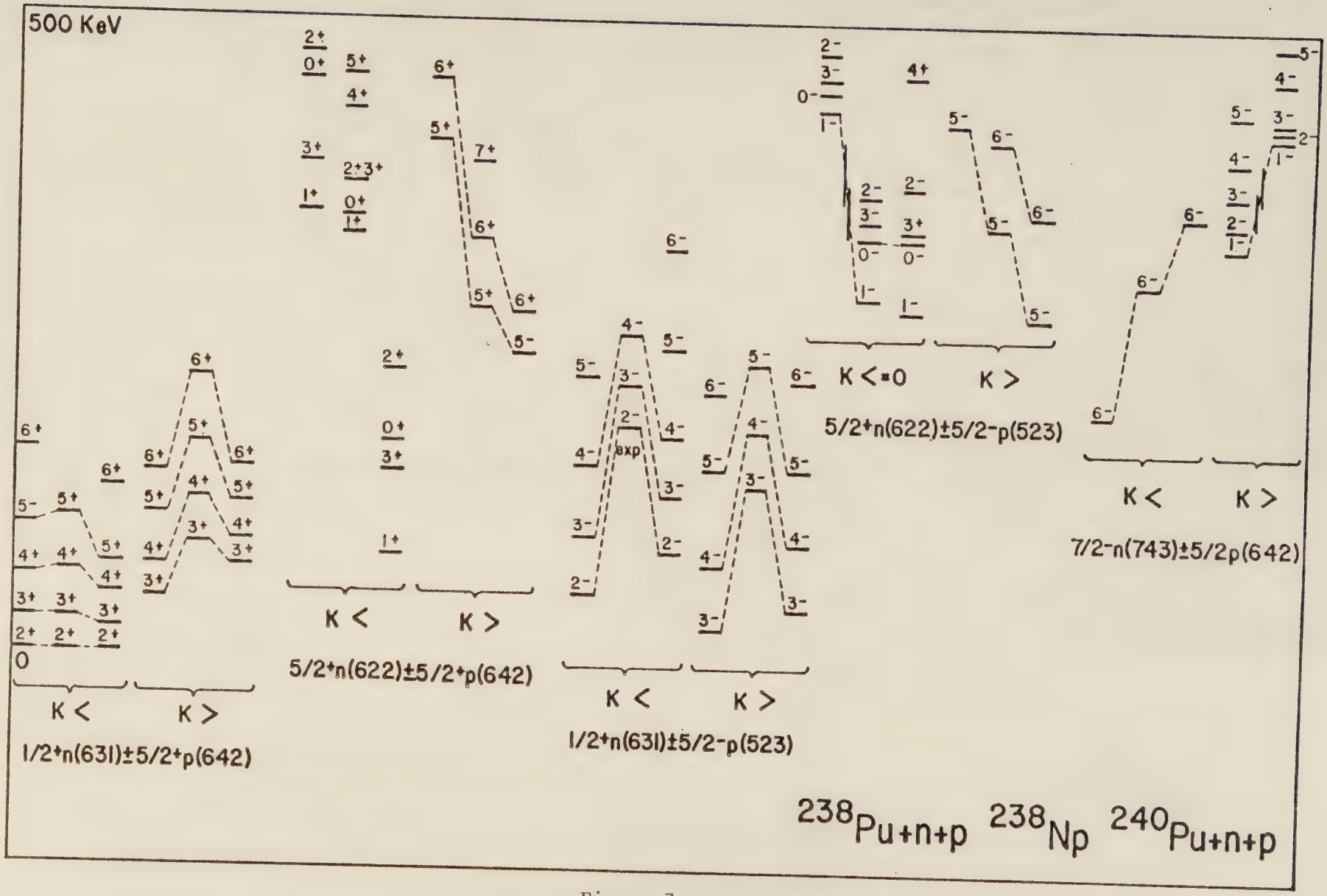

Figure 7

Comparaison entre les schémas de niveaux expérimentaux et théoriques du ^{238}Np. Les niveaux théoriques proviennent des calculs rotor + 2 qps sur les noyaux ^{238,240}Pu.

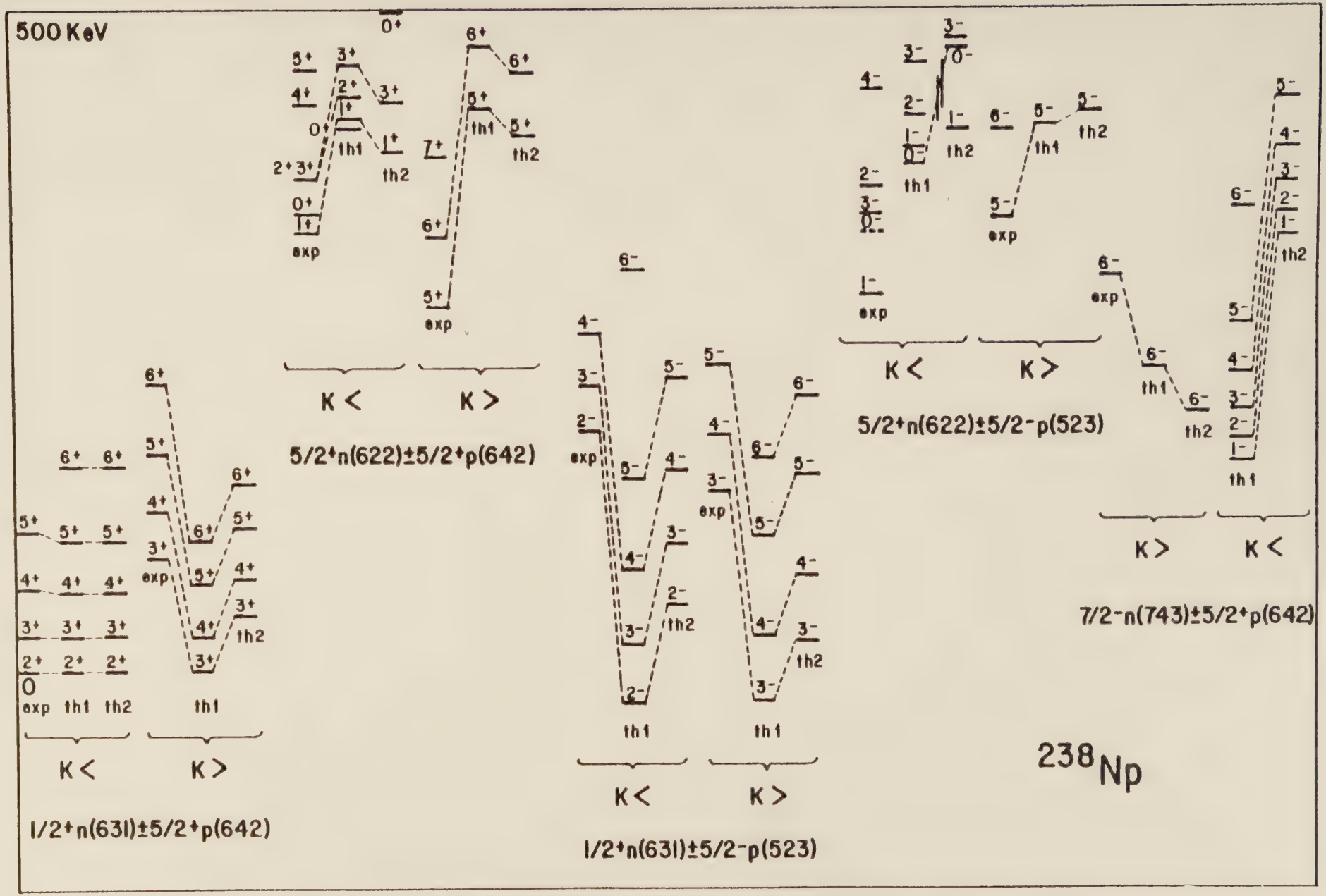

Figure 8
Comparaison entre les schémas de niveaux expérimentaux et théoriques du noyau ^{238}Np.

C I N Q U I E M E C H A P I T R E

V - ETUDE DU NOYAU ^{174}Lu

Introduction

L'étude de noyaux impairs-impairs de la région des terres rares a été entreprise au C.S.N.S.M. par C.F. Liang, P. Paris, A. Péghaire et M.G. Porquet. Ces travaux correspondent à une série d'expériences réalisées ces derniers mois au séparateur ISOCELE en ligne avec le Synchrocyclotron d'Orsay, en vue d'obtenir les niveaux excités de ^{166}Lu et ^{168}Lu par décroissance β de noyaux d'Hafnium. Ces noyaux excités d'Hafnium étant créés avant la séparation par des réactions (He^3xn) induites par le faisceau (280 MeV) sur des cibles de fluorure d'Ytterbium stable.

Les schémas de ces deux noyaux situés loin de la vallée de stabilité demeurent jusqu'au dépouillement de ces expériences inconnus pour l'essentiel. Le choix expérimental, qui avait été guidé par une question de faisabilité à ISOCELE, s'était finalement porté sur ces noyaux de Lutétium en particuler parce que cette chaine d'isotopes, bien à l'écart des couches fermées et des zones transitionnelles, constitue à priori un domaine d'application convenable du formalisme Rotor plus deux quasi-particules que nous avons développé.

Dans ce contexte, il est apparu nécessaire de décrire dans un premier temps, un des schémas voisins les plus détaillés, afin d'estimer la qualité des prévisions du modèle dans cette région de la charte.

Le noyau ^{174}Lu, beaucoup plus proche de la ligne de stabilité et ayant par suite fait l'objet de plusieurs études expérimentales, constitue justement l'exemple type dont nous avons besoin, avant d'entreprendre une approche systématique de la chaine isotopique du Lutétium. Ce schéma expérimental, obtenu à la suite de plusieurs séries d'expériences complémentaires de réaction ($^{175}Lu(d,t)^{174}Lu$ (50), ^{173}Yb $(\alpha,t)^{174}Lu$, $^{173}Yb(^3He,d)^{174}Lu$, $^{175}Lu(^3He,\alpha)^{174}Lu$ et $^{175}Lu(d,t)^{174}Lu$ (51)) est en effet particulièrement bien connu puisque neuf doublets de bandes rotationnelles échelonnés jusqu'à 2 MeV y ont été observés.

Nous rendons donc compte dans le présent chapître de la description Rotor plus deux quasi-particules des états excités du $^{174}_{71}Lu$, obtenue à partir des solutions HF + BCS calculées pour chacun des coeurs pairs-pairs voisins, à savoir $^{174,172}_{70}Yb$ et $^{174,176}_{72}Hf$.

1) Détermination HF + BCS des propriétés statiques de $^{172,174}Yb$ et de $^{174,176}Hf$

Nous avons réalisé le calcul des solutions pour ces noyaux de manière analogue à celle employée pour les noyaux d'actinide du chapître précédent. La solution au minimum d'énergie de déformation est ainsi définie par 25 itérations HF, en utilisant la même interaction SIII. Cependant, ces noyaux de terre rare étant plus légers, le calcul est mené sur une base d'oscillateur harmonique déformé à 11 couches majeures seulement. La minimisation de l'énergie par rapport aux paramètres de base b et q a été conduite auparavant par une série de calculs successifs dans une base à 9 couches majeures. Comme précédemment l'appariement est traité à l'ordre des approximations de BCS, en utilisant l'élément de matrice de pairing constant $G_{ij} = -G$ défini par la prescription usuelle pour le noyau à A nucléons, $G = G_o/X + A$, avec $X = 11$ et $G_o = 12.5$.

Nous avons reporté dans le tableau 8 les valeurs de b, q et celles des "gaps" d'appariement correspondant à chacun des noyaux pairs-pairs étudiés.

Dans le tableau 9, nous indiquons les propriétés statiques que nous avons obtenues dans ces conditions de calcul, l'énergie totale (sans correction de troncature) les rayons, les moments quadrupolaires de masse. La valeur expérimentale du moment quadrupolaire y est également indiquée lorsqu'elle est disponible, ainsi que la valeur de la déformation β_2 déduite de la valeur calculée de ce moment quadrupolaire.

2) Calcul Rotor plus deux quasi-particules du spectre ^{174}Lu

Ces calculs ont été effectués dans des conditions sensiblement identiques à celles employées pour le noyau ^{238}Np.

Nous avons sélectionné pour chacun des coeurs les états individuels proton et neutron des solutions d'équilibre H.F situés dans une bande de

± 2 MeV environ autour des niveaux de Fermi respectifs, soit en pratique huit états dans chaque isospin. Les valeurs $\mathcal{J}(R)$ des moments d'inertie utilisés dans ces calculs sont extraites des énergies expérimentales dans la bande fondamentale du coeur pair-pair considéré et extrapolées jusqu'au moment angulaire 20$\hbar$ (figure 9).

La figure 10 présente la comparaison expérience-théorie uniquement pour les têtes de bande et jusqu'à une énergie d'environ 1.5 MeV. Ces résultats sont regroupés par doublet $K_> - K_<$. Les niveaux expérimentaux sont en gras au milieu des prévisions théoriques. De gauche à droite sont reportés les niveaux calculés à partir de chacun des coeurs ^{172,174}Yb d'une part, et ^{174,176}Hf d'autre part.

Les quatre calculs rendent compte de 7 doublets de bandes déjà identifiées avec les mêmes assignations, et avec des écarts de l'ordre de 500 keV, ce qui demeure raisonnable, comme on l'a vu au chapître IV, dans des calculs où l'interaction résiduelle proton-neutron n'a pas été prise en compte.

Les têtes de bande :

$1^-, 6^+$ $\quad [\frac{5}{2}^-n(512), \ \frac{7}{2}^+p(404)]$

$2^+, 3^+$ $\quad [\frac{5}{2}^-n(512), \ \frac{1}{2}^-p(541)]$

$3^+, 7^+$ $\quad [\frac{7}{2}^+n(633), \ \frac{7}{2}^+p(404)]$

$0^-, 5^-$ $\quad [\frac{5}{2}^-n(512), \ \frac{5}{2}^+p(402)]$

$3^+, 7^+$ $\quad [\frac{5}{2}^-n(512), \ \frac{9}{2}^-p(514)]$

$3^-, 4^-$ $\quad [\frac{1}{2}^-n(521), \ \frac{7}{2}^+p(404)]$

$1^+, 4^+$ $\quad [\frac{5}{2}^-n(512), \ \frac{3}{2}^-p(532)]$

sont ainsi bien retrouvées quel que soit le coeur utilisé. Notons d'ailleurs que le spin du fondamental est également reproduit sans ambiguïté par les quatre calculs.

Notons enfin que les mélanges Coriolis restent relativement faibles, autrement dit que les états demeurent assez purs sur la base des états

individuels HF, qui eux sont toujours assez mélangés sur la base de l'oscillateur harmonique déformé. Ainsi les états individuels correspondant étiquetés par leur composante majeure sont définis par les décompositons suivantes :

$\frac{5^-}{2}n[512]$ = 63% (512) + 10% (312) + 12% (712) + 7% (732) + ...

$\frac{7^+}{2}p[404]$ = 86% (404) + 9% (604) + ...

$\frac{1^-}{2}p[541]$ = 32% (541) + 23% (550) + 10% (770) + 9% (521) + 8% (761) + 7% (

$\frac{7^+}{2}n[633]$ = 69% (633) + 9% (624) + 8% (853) + 6% (613) + ...

$\frac{5^+}{2}p[402]$ = 59% (402) + 17% (202) + 20% (602) + ...

$\frac{9^-}{2}p[514]$ = 82% (514) + 5% (734) + ...

$\frac{3^-}{2}p[532]$ = 52% (532) + 18% (541) + 9% (752) + 5% (512) + ...

Cependant, dans certains cas, le couplage de Coriolis peut être non négligeable pour des bandes $K_>$ et $K_<$ d'un même doublet. Par exemple, pour le doublet 2^+, 3^+ bâti sur la configuration $[\frac{5^-}{2}n(512), \frac{1^-}{2}p(541)]$ observé expérimentalement à 0.278 et 0.411 MeV, la tête de bande $K_>$ (3+) est telle que 3+ = 60% $K_>$ + 39% $K_<$.

Le doublet expérimental 2^-, 3^- observé à 1.1178 et 1.304 MeV, avait été (51) assigné $[\frac{7^+}{2}p(404), \frac{1^-}{2}n(521)]$. Quoique nos calculs rendent compte de l'existence d'un tel doublet à très haute énergie dans les quatre coeurs (E > 1.6 MeV), il paraissait plus convenable de proposer ici l'état $[\frac{7^-}{2}n(514), \frac{3^+}{2}p(411)]$ pour lequel les énergies calculées encadrent les valeurs expérimentales.

Enfin nos calculs ne prédisent pas l'existence du doublet 2^+, 3^+ de l'état $[\frac{5^-}{2}n(512), \frac{1^-}{2}p(530)]$ observé expérimentalement à 1.293 et 1.262 MeV. Cependant, nous trouvons dans une région d'énergie compatible un autre doublet 2^+, 3^+ bâti sur la configuration $[\frac{5^+}{2}n(642), \frac{1^+}{2}p(411)]$, que nous proposons donc pour interpréter ces bandes.

La figure 11 présente pour les deux coeurs ^{172}Yb et ^{174}Hf la comparaison expérience-théorie du schéma complet de ^{174}Lu en donnant pour chaque doublet, de gauche à droite, l'expérience, la prédiction de ^{172}Yb + 2 qps et la prédiction de ^{174}Hf + 2 qps. Un accord satisfaisant est obtenu pour l'ensemble des cinq doublets de bandes bien établies expérimentalement, en dessous de 1 MeV, ainsi que pour les trois doublets de haute énergie.

Dans les résultats d'expériences de transfert de proton (^{3}He,d) (α,t) et de transfert de neutron (d,t) (^{3}He,α) (51), il subsiste des raies doubles non résolues et des pics de faible intensité, correspondant à des transitions de niveaux peu peuplés par ces réactions. Des structures existant dans le schéma peuvent être ainsi absentes ou masquées. De plus, dans ces mesures, dix raies situées entre 0.5 et 1.2 MeV (expériences en protons) et huit raies entre 0.395 et 1.2 MeV (expériences en neutrons) ne sont ni assignées ni placées sur le schéma proposé. Enfin l'analyse proposée
pour des réactions de pick-up de neutron ne fait intervenir que le couplage de proton $\frac{7^+}{2}$(404) de la cible à un neutron non apparié. Pour les réactions de stripping de proton, de même cette analyse ne fait intervenir que le couplage du neutron $\frac{5^-}{2}$(512) de la cible au proton transféré.

Il est donc naturel que le calcul met en évidence l'existence d'états non encore observés. D'ailleurs nous obtenons plusieurs doublets de bandes sans équivalent expérimental. En particulier, des doublets bâtis sur des nouveaux états neutron ($\frac{9^+}{2}$(624)) et proton ($\frac{7^-}{2}$(523)).

A basse énergie, apparaissent, avec les calculs rotor plus deux quasi-particules, les doublets suivants :

$\left[\frac{5^-}{2}n(523), \frac{7^-}{2}p(523)\right]$: $\begin{cases} 1^+ & 0.328 \text{ MeV} \\ 6^+ & 0.770 \text{ MeV} \end{cases}$

$\left[\frac{7^+}{2}n(633), \frac{1^+}{2}p(411)\right]$: $\begin{cases} 3^+ & 0.278 \text{ MeV} \\ 4^+ & 0.280 \text{ MeV} \end{cases}$

$\left[\frac{1^-}{2}n(521), \frac{7^-}{2}p(523)\right]$: $\begin{cases} 3^+ & 0.577 \text{ MeV} \\ 4^+ & 0.582 \text{ MeV} \end{cases}$

$[\frac{5}{2}^- n(512), \frac{1}{2}^+ p(411)]$ $\begin{cases} 2- & 0.000 \text{ MeV} \\ 3- & 0.006 \text{ MeV} \end{cases}$

$[\frac{7}{2}^- n(514), \frac{1}{2}^+ p(411)]$ $\begin{cases} 3- & 0.398 \text{ MeV} \\ 4- & 0.406 \text{ MeV} \end{cases}$

$[\frac{1}{2}^- n(521), \frac{1}{2}^+ p(411)]$ $\begin{cases} 0- & 0.203 \text{ MeV} \\ 1- & 0.208 \text{ MeV} \end{cases}$

Conclusion

Nos calculs rendent compte de la structure en bandes du noyau ^{174}Lu, bien qu'il subsiste un léger désaccord avec l'expérience qui doit être apprécié dans le cadre d'un modèle sans aucun paramètre ajustable et d'autre part sans l'introduction de V_{resid}. Or, l'interaction résiduelle a, comme on l'a déjà signalé, amélioré les résultats dans le noyau du ^{238}Np, notamment en ce qui concerne les perturbations des bandes $K_< = 0$.

Noyaux	b	q	Δ_n	Δ_p
$^{172}_{70}Yb_{102}$	.492	1.28	.496	1.076
$^{174}_{70}Yb_{104}$	.4875	1.215	.66	.987
$^{174}_{72}Hf_{102}$	.488	1.28	.67	.909
$^{176}_{72}Hf_{104}$	.491	1.28	.611	1.041

Tableau 8

Paramètres de déformations b et q (b en fm^{-1}) et valeurs (en MeV) des gaps d'appariements pour les protons et les neutrons, obtenus avec des calculs HF + BCS et l'interaction SIII.

Noyaux	E (MeV)	r_c(fm)	Q_2(b)	β_2
^{172}Yb	-1389.79	5.39	1.99 Exp= 2.16±0.37	0.308
^{174}Yb	-1403.70	5.39	1.853 Exp=2.12±0.36	0.283
^{174}Hf	-1401.55	5.42	1.97	0.299
^{176}Hf	-1416.49	5.42	1.88	0.283

Tableau 9

Energies de liaison, rayons de charges, moments quadrupolaires et valeurs de déformation déduites des moments Q_2, obtenus à partir des calculs HF + BCS et l'interaction SIII.

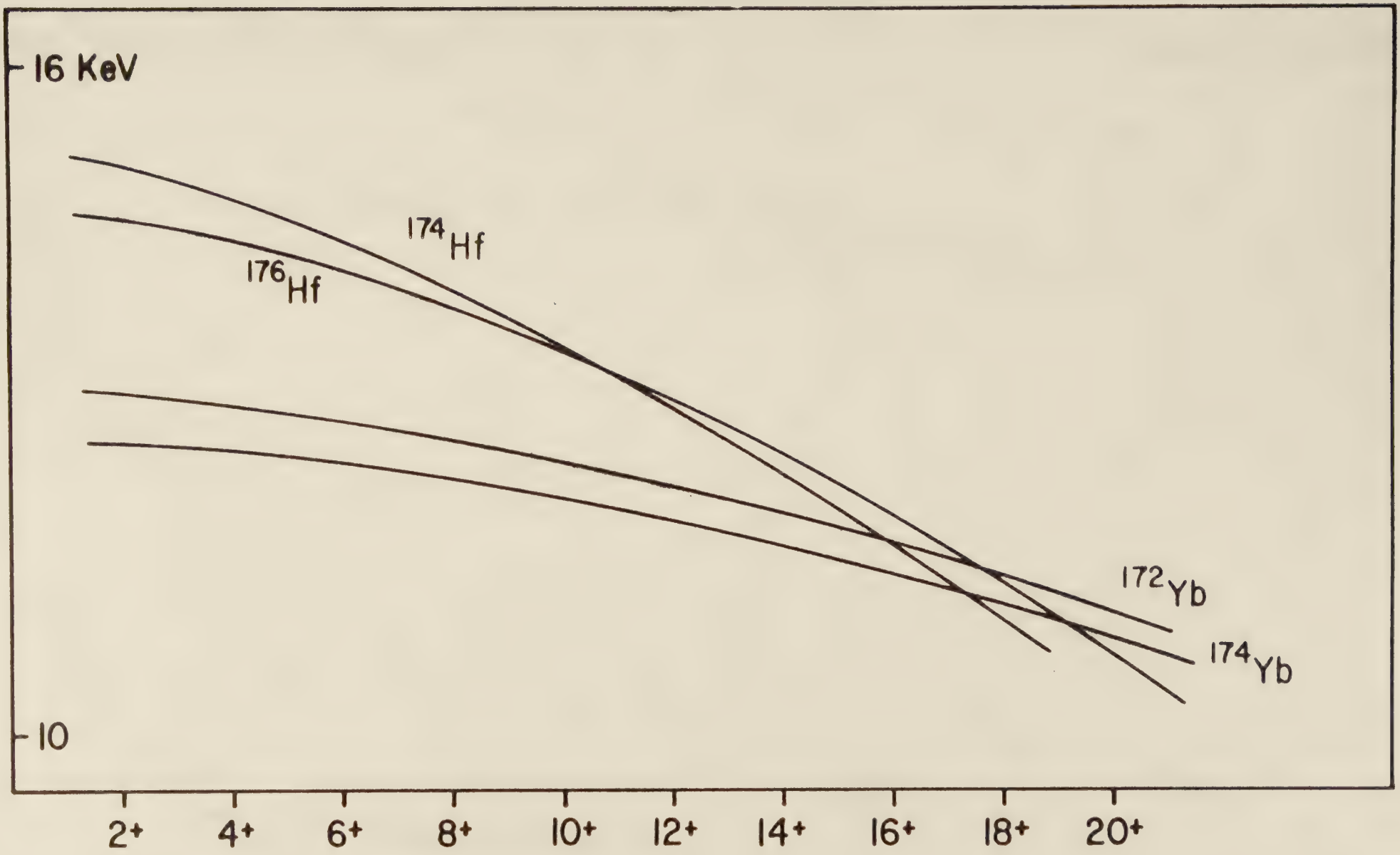

Figure 9

Moments d'inertie en fonction du nombre quantique R des noyaux pairs-pairs.

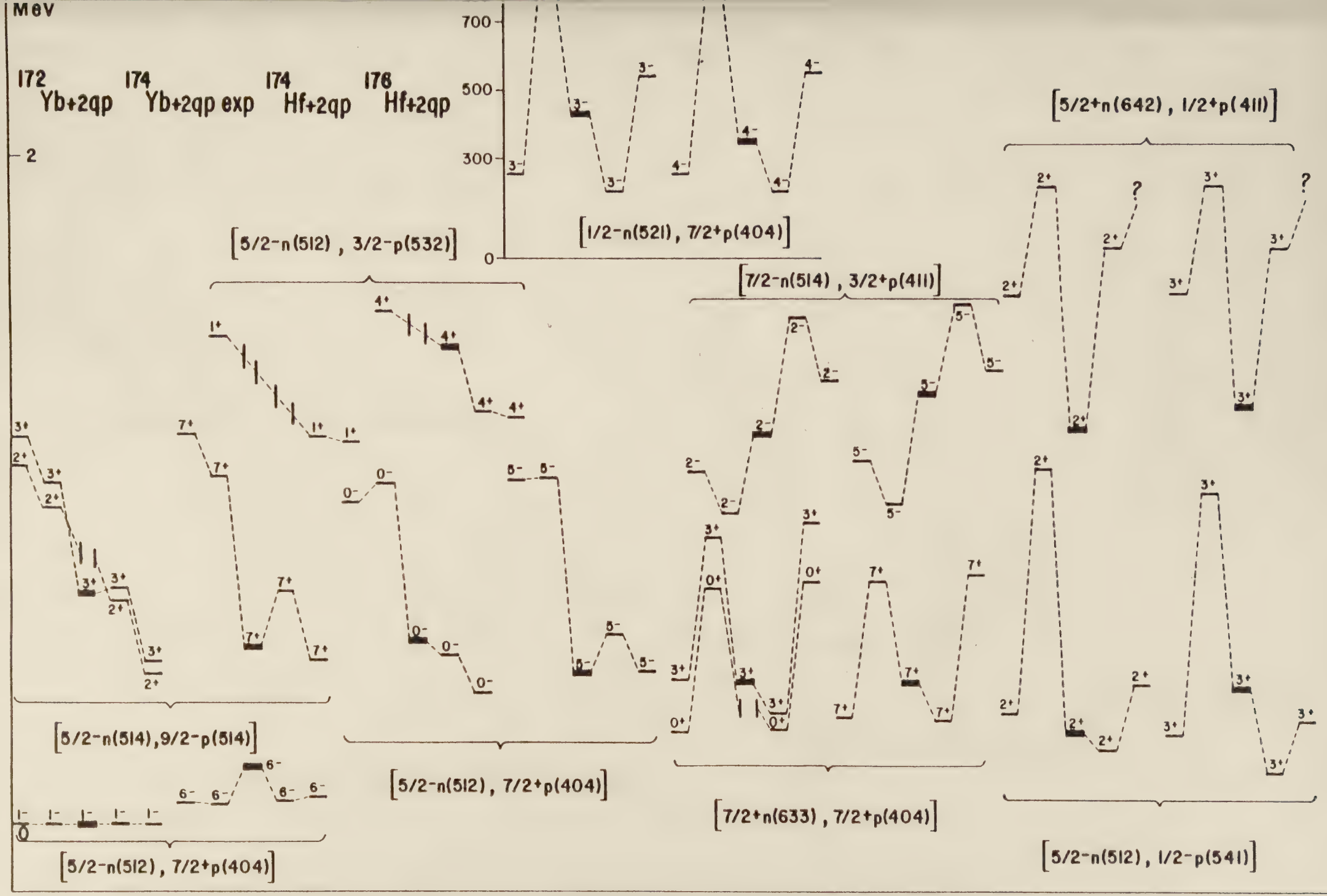

Figure 10

Têtes de bandes expérimentales et théoriques du noyau ^{174}Lu (les valeurs expérimentales sont

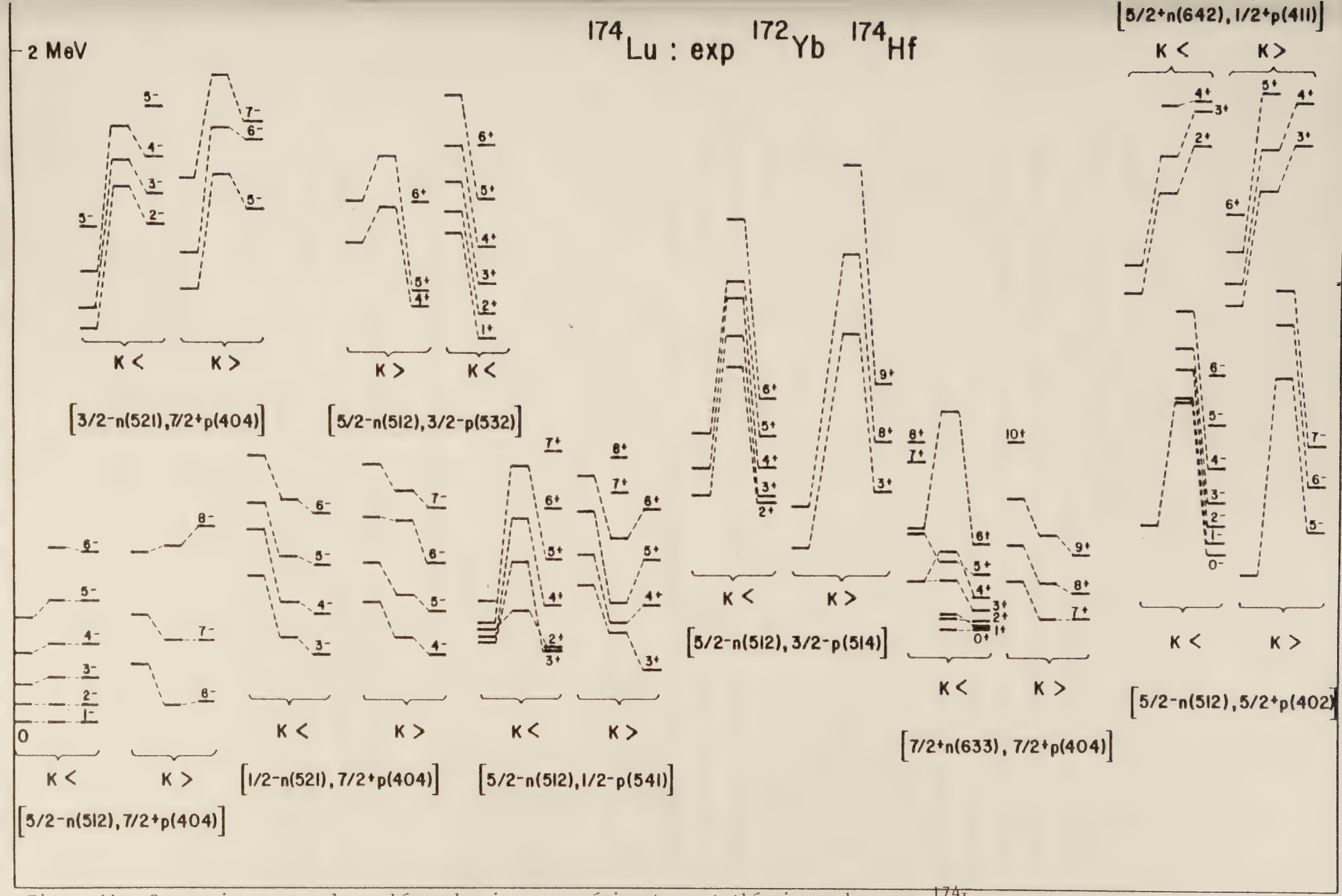

Figure 11 : Comparaison entre les schémas de niveaux expérimentaux et théoriques du noyau ^{174}Lu.

CONCLUSION

L'ensemble des résultats que nous avons obtenus en utilisant le modèle Rotor-plus-deux quasi-particules nous a permis de reproduire de façon très précise les schémas obtenus, à basse énergie, dans les noyaux ^{238}Np et ^{174}Lu. Pour de tels noyaux bien déformés, notre approche apparaît comme très précieuse pour les expérimentateurs, dans la mesure où elle permet d'une part de confirmer des assignations et des prédictions et où d'autre part elle permet de signer le caractère vibrationnel de certaines bandes non reproduites par nos calculs. Le caractère très satisfaisant de l'accrod obtenu avec les données de l'expérience doit être apprécié dans le cadre d'un modèle microscopique sans aucun paramètre ajustable ayant comme point de départ une interaction nucléon-nucléon donnée. Il est clair cependant qu'en l'état actuel, toute conclusion, autre que qualitative ne peut avoir qu'une valeur indicative, en ce sens que l'estimation réelle de la valeur de prédiction du modèle passe nécessairement par une approche systématique qui reste à réaliser. En outre, si les contributions diagonales de V_{resid} dues aux énergies de Gallagher-Moszkowski et de Newby, auxquelles conduisent l'interaction de Skyrme SIII, sont satisfaisantes dans ces études, le poids relatif des contributions non diagonales reste encore à apprécier et fait l'objet d'études en cours.

On peut noter, cependant que cette interaction n'a pas pu rendre compte quantitativement des énergies de type Newby pour les protons et neutrons à spins anti-parallèles. Ceci pourrait s'expliquer par l'absence de terme tenseur dans l'interaction de Skyrme.

Malgré l'absence dans les présents calculs de résultats sur les probabilités de transitions réduites, la bonne reproduction des spectres d'énergie des noyaux ^{238}Np et ^{174}Lu constitue un test capital en ce qui concerne la qualité des fonctions d'onde individuelles et par conséquent de l'interaction effective nucléon-nucléon de Skyrme SIII.

Cependant ce modèle, sous l'hypothèse restrictive d'un coeur purement rotationnel est limité à la description des noyaux bien déformés. Pour décrire les noyaux transitionnels, il faudrait coupler les états à deux quasi particules à des solutions non triviales du Hamiltonien collectif de Bohr. Un tel travail de longue haleine est en cours.

Appendice A

La base asymptotique est constituée par l'ensemble des vecteurs propres des quatre opérateurs suivants :

- L'oscillateur harmonique déformé à symétrie axiale :

$$H_o = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\left(\omega_\perp^2 (x^2+y^2) + \omega_z^2 z^2\right) \qquad \text{(A-1)}$$

(où $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$)

- La composante du moment cinétique orbital suivant l'axe Oz :

$$L_z = -i\hbar\left(x\,\partial_y - y\,\partial_x\right) \qquad \text{(A-2)}$$

- La troisième composante du spin S_z

- La troisième composante τ_z de l'isospin.

On exprime H_o et L_z en fonction des opérateurs usuels de création et d'annihilation des bosons :

$$\forall\, u \in \{x, y, z\} \qquad a_u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C_u\, u - \frac{1}{C_u}\,\partial_u\right]$$

$$a_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C_u\, u + \frac{1}{C_u}\,\partial_u\right] \qquad \text{(A-3)}$$

avec $C_u = \sqrt{\frac{m\omega_u}{\hbar}}$

Les opérateurs a_u^+ , a_u satisfont aux relations de commutation des bosons.

On introduit deux opérateurs N et L_z :

(A-4)

$$N_\perp = a_x^+ a_x + a_y^+ a_y \qquad N_z = \left(a_z^+ a_z + \frac{1}{2}\right)$$

et l'on fait la transformation unitaire suivante :

$$b_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_x - i a_y\right)$$

$$b_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_x + i a_y\right) \qquad \text{(A-5)}$$

Dans ce cas les opérateurs N et L_z s'écrivent comme suit :

$$N_\perp = b_\alpha^+ b_\alpha + b_\beta^+ b_\beta$$

$$L_z = \hbar \left(b_\alpha^+ b_\alpha - b_\beta^+ b_\beta \right) \qquad \text{(A-6)}$$

Un état propre commun à N et L_z avec les valeurs propres n et $h\lambda$ est de la forme :

$$| n_\perp \Lambda \rangle = | n_\alpha , n_\beta \rangle = (-1)^{n_\beta} \frac{\left(b_\alpha^+\right)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \frac{\left(b_\beta^+\right)^{n_\beta}}{\sqrt{n_\beta!}} \qquad \text{(A-7)}$$

avec : $n_\alpha = \dfrac{n_\perp + \Lambda}{2}$ $\qquad$ $n_\beta = \dfrac{n_\perp - \Lambda}{2}$

Un état propre de L_z avec la valeur propre n_z s'écrira :

$$| n_z \rangle = \frac{\left(a_z^+\right)^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} | 0 \rangle \qquad \text{(A-8)}$$

En représentation position, le ket séparable $|n_z, \alpha, \beta\rangle$ est de la forme :

$$\langle z \mid n_z \rangle \qquad \langle \phi \varphi \mid \alpha \beta \rangle \tag{A-9}$$

$$\langle z \mid n_z \rangle = \sqrt{C_z} \quad u_{n_z} \quad (C_z z)$$

$$\langle \phi \varphi \mid \alpha \beta \rangle = (-1)^{\left(\frac{1-\Lambda}{2}\right)} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \quad e^{i(\alpha-\beta)\phi} \quad \mathcal{L}^{|\alpha-\beta|}_{(\alpha+\beta-|\alpha-\beta|)/2} (C_\perp^2 \varphi^2)$$

Les définitions des polynômes de Laguerre et les fonctions associées d'Hermite sont données en référence (40).

Le renversé du sens du temps d'un état de la base asymptotique est égal :

$$T \mid n_z \; n_\perp \; \Lambda \; \Sigma \; z \rangle = (-1)^{\Lambda+\Sigma-\frac{1}{2}} \mid n_z \; n_\perp \; -\Lambda \; -\Sigma \; , z \rangle = \mid \overline{n_z \; n_\perp \; \Lambda \Sigma \; z} \rangle$$

(A-10)

On projette les états de la base asymptotique sur la base sphérique d'un oscillateur harmonique isotrope labellée par
au moyen des coefficients de Clebsch-Gordan, comme suit :

$$| n_z(\omega_z),\ n_\perp(\omega_\perp),\ \Lambda(\omega_\perp),\ \Sigma,\ \tau \rangle \quad = \qquad \text{(A-1}$$

$$= \sum_{\substack{m\ell \\ n_{z'}=0,\infty}} \sum_{\substack{j\,k \\ k=\Lambda+\Sigma}} \delta_{n_z - n_{z'},\,\text{pair}} \quad \delta_{n_{z'}+n_\perp,\,2m+\ell} \quad B_{n_z,n_{z'}}\left(\frac{\omega_z}{\omega_\perp}\right) \quad A^{\Lambda}_{n_{z'}\,n_\perp,\,n\ell}$$

$$\langle \ell, \Lambda, \tfrac{1}{2}, \Sigma \,|\, j\,k \rangle \;|\, n\,\ell\,j\,k\,\tau \rangle \quad =$$

$$\sum_{m\ell j} T(m\ell j,\ n_z\, n_\perp\, \Lambda\ \Sigma) \;|\, n\,\ell\,j\,k\,\tau \rangle$$

où $A^{\Lambda}_{n_{z'}\,n_\perp\,n_\ell}$ et $B_{n_z,n_{z'}}\left(\frac{\omega_z}{\omega_\perp}\right)$

sont des coefficients réels (38, 53).

Le renversé du sens du temps de cet état (A-11) est égal (52) :

$$|\overline{n_z\ n_\perp\ \Lambda\ \Sigma\ \tau}\rangle \quad = \pi \sum_{m\ell j} T(m\ell j,\ n_z\, n_\perp\, \Lambda\ \Sigma)(-1)^{j+k} \,|\, n\ell j\,-k$$

(A-12

Appendice B

Les états propres d'un système de deux particules dans un puits de potentiel représenté par un oscillateur harmonique déformé à symétrie axiale sont donnés :

- soit en coordonnées $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par le ket : $|\, n_1\ \alpha_1\ \beta_1\rangle \otimes |\, n_2\ \alpha_2\ \beta_2\rangle$
- soit en coordonnées $\vec{R} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{\sqrt{2}}$ et $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}}$ par le ket :

$|\, N\ A\ B\rangle \otimes |\, n\ a\ b\rangle$

Le passage entre ces deux kets se fait au moyen des coefficients de Moshinsky à trois dimensions :

$$|\, n_1, \alpha_1, \beta_1\rangle \otimes |\, n_2, \alpha_2, \beta_2\rangle = \sum_{\substack{n,a,b \\ N,A,B}} \langle n\,a\,b, N\,A\,B \,||\, n_1, \alpha_1, \beta_1,\ n_2, \alpha_2, \beta_2\rangle\ |\, n\,a\,b, N\,A\,B\rangle \qquad \text{(B-1)}$$

Chacun de ces coefficients se factorise en trois coefficients à une dimension :

$$\langle n\,a\,b, N\,A\,B \,||\, n_1, \alpha_1, \beta_1,\ n_2, \alpha_2, \beta_2\rangle = \langle n, N \,||\, n_1, n_2\rangle \langle a\,A \,||\, \alpha_1 \alpha_2\rangle \langle b\,B \,||\, \beta_1 \beta_2\rangle \qquad \text{(B-2)}$$

Les coefficients de Moshinsky à une dimension sont des matrices de rotation de Wigner réduites (rotation de $\pi/2$)

$$\langle n_1\ n_2 \,||\, n\ N\rangle = \delta_{n_1+n_2,\, n+N} \sqrt{\frac{n!\ N!\ n_1!\ n_2!}{2^{(n_1+n_2)}}} \sum_{l=\max(0,\, n_2-N)}^{\min(n_2,n)} (-1)^l \frac{1}{(n_2-l)!\ (N-n_2+l)!\ l!\ (n-l)!} \qquad \text{(B-3)}$$

Ils obéissent aux relations suivantes :

$$\langle n_2\ n_1 \,||\, n\ N\rangle = (-1)^n \langle n_1\ n_2 \,||\, n\ N\rangle \qquad \text{(B-4)}$$

Appendice C

Soit T et V des opérateurs à un et à deux corps respectivement ils s'écrivent en seconde quantification en fonction d'une base d'états à une particule :

$$T = \sum_{ij} \langle i|T|j\rangle \; a_i^+ a_j$$

$$V = \sum_{ijkl} \frac{1}{4} \langle ij|V|\tilde{kl}\rangle \; a_i^+ a_j^+ a_l a_k$$

où : $\langle ij|V|\tilde{kl}\rangle = \langle ij|V|kl\rangle - \langle ij|V|lk\rangle$ (C-1)

dit élément de matrice antisymétrisé.

Les opérateurs de quasi-particules sont définis par la donnée des facteurs de pairing u_i, v_i :

$$\begin{aligned} \eta_i^+ &= u_i a_i^+ - v_i a_{\bar{i}} \\ \eta_{\bar{j}}^+ &= u_j a_{\bar{j}}^+ + v_j a_j \end{aligned} \qquad \text{(C-2)}$$

Ces opérateurs ont pour vide un état de $|BCS\rangle$

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} \left(u_i + v_i \, a_i^+ a_{\bar{i}}^+\right)|0\rangle \qquad \text{(C-3)}$$

et ils obéissent aux règles de commutations des fermions

$$[\eta_i, \eta_j^+] = \delta_{ij} \qquad \text{(C-4)}$$

On exprime T et V en fonction des opérateurs de quasi-particules ainsi définies :

$$T = \sum_{ij} \langle i | T | j \rangle \left[u_i u_j \eta_i^+ \eta_j + v_i v_j \eta_{\bar{i}} \eta_{\bar{j}}^+ + v_i u_j \eta_{\bar{i}} \eta_j + u_i v_j \eta_i^+ \eta_{\bar{j}}^+ \right]$$

(C-5)

On voit que les deux derniers termes de l'équation (C-5) n'interviennent jamais dans le calcul de la valeur moyenne de T entre des états $|BCS\rangle$, ou des états de quasi-particules (q-p) d'une base donnée. En effet le théorème de Wich annule ces termes entre des états à une q-p, à 2 q-p ou à n q-p ; donc pour le calcul de sa valeur moyenne T est équivalent à T'.

$$T' = \sum_{ij} \langle i | T | j \rangle \left[u_i u_j \eta_i^+ \eta_j + v_i v_j \eta_{\bar{i}} \eta_{\bar{j}}^+ \right] \qquad \text{(C-6)}$$

Le même traitement et la même remarque sur le théorème de Wich font que l'opérateur à deux corps V est équivalent à un opérateur V' pourle calcul de sa valeur moyenne entre des états de quasi-particules d'une base donnée.

$$V' = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \langle ij | V | \tilde{k}\tilde{l} \rangle \qquad \text{(C-7)}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[u_i u_j u_k u_l \eta_i^+ \eta_j^+ \eta_l \eta_k + v_i v_j v_l v_k \eta_{\bar{i}} \eta_{\bar{j}} \eta_{\bar{l}}^+ \eta_{\bar{k}}^+ + \\
&v_i u_j v_l u_k \eta_{\bar{i}} \eta_j^+ \eta_{\bar{l}}^+ \eta_k + v_i u_j u_l v_k \eta_{\bar{i}} \eta_j^+ \eta_l \eta_{\bar{k}}^+ + \\
&u_i v_j u_l v_k \eta_i^+ \eta_{\bar{j}} \eta_l \eta_{\bar{k}}^+ + u_i v_j v_l u_k \eta_i^+ \eta_{\bar{j}} \eta_{\bar{l}}^+ \eta_k
\end{aligned}$$

Le seul opérateur à deux corps étudié est l'interaction nucléon-nucléon.
Il est invariant par renversement du sens du temps.
On obtient dans ce cas :

$$V' = V_0 + \sum_{i,j} \mathcal{U}(i,j)\, \eta_i^+ \eta_j + V_{resid} \qquad \text{(C-8)}$$

où : $$V_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij|V|\tilde{i}\tilde{j}\rangle V_i^2 V_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{ij} \langle i\bar{\imath}|V|\tilde{j}\bar{\jmath}\rangle u_i v_i u_j v \qquad \text{(C-9)}$$

$$\mathcal{U}(i,j) = (u_i u_j - v_i v_j) \sum_k \langle ik|V|\tilde{i}\tilde{k}\rangle V_k^2 \qquad \text{(C-10)}$$

$$+ (u_i v_j - u_j v_i)\, \frac{1}{4} \sum_k \langle i\bar{\jmath}|V|\tilde{k}\tilde{k}\rangle u_k v_k$$

$$V_{resid} = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \eta_i^+ \eta_j^+ \eta_l \eta_k \qquad \text{(C-11)}$$

$$\left[(u_i u_j u_l u_k + v_i v_j v_l v_k) \langle ij|V|\tilde{k}\tilde{l}\rangle + 4\, u_i u_k v_j v_l \langle i\bar{l}|V|\bar{\jmath}\tilde{k}\rangle \right]$$

La valeur moyenne d'un opérateur à un corps T entre des états à une quasi-particule est égale :

$$\langle BCS\ \eta_\beta \mid T \mid \eta_\alpha^+\ BCS \rangle \qquad \text{(C-12)}$$

$$\begin{cases} = \langle \beta \mid T \mid \alpha \rangle \left(u_\beta u_\alpha - v_\alpha v_\beta \right) + \delta_{\alpha\beta} \sum_i \langle i \mid T \mid i \rangle v_i^2 & \text{Si T est de type pair} \\ = \langle \beta \mid T \mid \alpha \rangle \left(u_\beta u_\alpha - v_\alpha v_\beta \right) & \text{Si T est de type impair} \qquad \text{(C-13)} \end{cases}$$

Alors que la valeur moyenne de T entre des états à deux quasi-particules est :

$$\langle BCS\ \eta_\beta \eta_\alpha \mid T \mid \eta_\alpha^+ \eta_\beta^+\ BCS \rangle = \qquad \text{(C-14)}$$

$$\left(\delta_{\alpha\alpha'}\ \delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\ \delta_{\alpha'\beta} \right) \sum_i \langle i \mid T \mid i \rangle v_i^2$$

$$+ \delta_{\alpha\alpha'} \langle \beta' \mid T \mid \beta \rangle \left(u_\beta u_{\beta'} - v_\beta v_{\beta'} \right) + \delta_{\beta\beta'} \langle \alpha' \mid T \mid \alpha \rangle \left(u_\alpha u_{\alpha'} - v_\alpha v_{\alpha'} \right)$$

$$+ \delta_{\alpha\beta'} \langle \beta' \mid T \mid \alpha \rangle \left(u_{\beta'} u_\alpha - v_{\beta'} v_\alpha \right) + \delta_{\beta\alpha'} \langle \alpha' \mid T \mid \beta \rangle \left(u_{\alpha'} u_\beta - v_{\alpha'} v_\beta \right)$$

Si T et V sont les opérateurs énergie cinétique et interaction nucléon-nucléon du Hamiltonien H équ.(I-4),
H est équivalent pour le calcul de sa valeur moyenne entre des états à n quasi-particules à :

$$H = E_{BCS} + \sum_i E_{qp}(i)\ \eta_i^+ \eta_i + V_{residuelle} \qquad \text{(C-15)}$$

où $$E_{BCS} = \sum_i \left(\langle i \mid T \mid i \rangle + \frac{1}{2} \sum_j \langle ij \mid V \mid \widetilde{ij} \rangle v_j^2 \right) v_i^2$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ij} \langle i\bar{\imath} \mid V \mid j\bar{\jmath} \rangle\ u_j v_j\ u_i u_i$$

et $$E_{qp}(i) = (u_i u_i - v_i v_i)\left[\langle i|T|i\rangle + \right.$$

$$\left. + \sum_k \langle ik|V|i\tilde{k}\rangle v_i^2 \right] + \frac{1}{2}(u_i v_i + v_i u_i) \sum_k \langle i\bar{i}|V|\tilde{\bar{k}}k\rangle u_k v_k$$

$E_{qp}(i)$ est dite énergie de la quasi-particule i. E_{BCS} est égale à la valeur moyenne de H entre l'état |BCS>

De même on calcule la valeur moyenne de H entre des états à deux quasi-particules

$$\langle BCS\ \eta_{\beta'}\eta_{\alpha'}|H|\eta_\alpha^+\eta_\beta^+\ BCS\rangle =$$

$$(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta})\ E_{BCS} + (\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta})\left[E_{qp}(\alpha) + E_{qp}(\beta)\right] +$$

$$\langle BCS\ \eta_{\beta'}\eta_{\alpha'}|V_{resid}|\eta_\alpha^+\eta_\beta^+\ BCS\rangle \qquad \text{(C-16)}$$

Le théorème de Wich permet, par ailleurs, le calcul de V_{resid} entre des états à deux quasi-particules.

$$\langle BCS\ \eta_{\beta'}\eta_{\alpha'}|V_{resid}|\eta_\alpha^+\eta_\beta\ BCS\rangle = \qquad \text{(C-17)}$$

$$(u_\alpha u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} + v_\alpha v_{\alpha'} v_\beta v_{\beta'})\langle\alpha'\beta'|V|\alpha\tilde{\beta}\rangle$$

$$-(u_{\alpha'} u_\alpha v_{\beta'} v_\beta + v_\alpha v_{\alpha'} u_\beta u_{\beta'})\langle\alpha'\bar{\beta}|V|\alpha\tilde{\bar{\beta}}'\rangle$$

$$+(u_{\alpha'} u_\beta v_\alpha v_{\beta'} + v_{\alpha'} v_\beta u_\alpha u_{\beta'})\langle\alpha'\bar{\alpha}|V|\beta\bar{\beta}'\rangle$$

Appendice D

Projection de la base standard $|I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle$ sur une base quasi-sphérique où $\vec{R}^2$ est diagonale

$$|I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \left[\mathcal{D}^I_{M,K}(\omega)\, \eta^+_{\alpha_n k_n}\, \eta^+_{\alpha_p k_p}\, |BCS\rangle + \right.$$

$$\left. + (-1)^{I+K}\, \mathcal{D}^I_{M,-K}(\omega)\, \eta^+_{\overline{\alpha_n k_n}}\, \eta^+_{\overline{\alpha_p k_p}}\, |BCS\rangle \right] \qquad \text{(D-1)}$$

En exprimant les opérateurs de quasi-particules en fonction des opérateurs de particules, on obtient :

$$|I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p\rangle = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \left\{ \left[\mathcal{D}^I_{M,K}(\omega) \right.\right.$$

$$\left. \left(u_n a^+_{\alpha_n k_n} - v_n a_{\overline{\alpha_n k_n}}\right) |BCS\rangle_n \otimes \left(u_p a^+_{\alpha_p k_p} - v_p a_{\overline{\alpha_p k_p}}\right) |BCS\rangle_p \right]$$

$$+ (-1)^{I+K}\, \pi_n \pi_p\, \mathcal{D}^I_{M,-K} \left[\right.$$

$$\left. \left. \left(u_n a^+_{\overline{\alpha_n k_n}} + v_n a_{\alpha_n k_n}\right) |BCS\rangle_n \otimes \left(u_p a^+_{\overline{\alpha_p m_p}} + v_p a_{\alpha_p m_p}\right) |BCS\rangle_p \right] \right\}$$

(D-2)

Les opérateurs de création de neutron et de proton peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires d'opérateurs de bon nombre quantique j ($\vec{j}$ moment angulaire de la particule).

$$a^{+}_{\alpha,k_\alpha}\,|BCS\rangle = \sum_{(n\ell),j_\alpha} G^{(n\ell),j_\alpha}_{\alpha,k_\alpha}\; a^{+}_{(n\ell),j_\alpha,k_\alpha}\;|BCS\rangle \qquad \text{(D-3)}$$

$$a^{+}_{\overline{\alpha,k_\alpha}}\,|BCS\rangle = \sum_{(n\ell),j_\alpha} \pi_\alpha\, G^{(n\ell),j_\alpha}_{\alpha,k_\alpha}\,(-1)^{j_\alpha+k_\alpha}\; a_{(n\ell),j_\alpha,-k_\alpha}\,|BCS\rangle$$

Les coefficients $G^{(n\ell),j_\alpha}_{\alpha,k_\alpha}$ sont des nombres réels donnés par l'équation (I-).

Les opérateurs $a^{+}_{(n\ell),j_\alpha,k_\alpha}$ et $(-1)^{j_\alpha+k_\alpha}\,a_{(n\ell),j_\alpha,-k_\alpha}$ sont des tenseurs irréductibles et donc se transforment dans une rotation (ω) faisant passer du système du laboratoire au référentiel lié au coeur, comme suit :

$$a^{+}_{(n\ell),j_\alpha k_\alpha} = \sum_{m_\alpha=-j_\alpha}^{j_\alpha} \mathcal{D}^{j_\alpha *}_{m_\alpha,k_\alpha}(\omega)\;\; a^{+}_{(n\ell),j_\alpha,m_\alpha} \qquad \text{(D-4)}$$

$$a_{(n\ell),j_\alpha,k_\alpha} = \sum_{m_\alpha=-j_\alpha}^{j_\alpha} \mathcal{D}^{j_\alpha}_{m_\alpha,k_\alpha}(\omega)\;\; a_{(n\ell),j_\alpha,m_\alpha}$$

En utilisant les équations précédentes et la propriété suivante des matrices de rotation de Wigner :

$$\mathcal{D}^{j\,*}_{m,k}(\omega) = (-1)^{m-k}\;\mathcal{D}^{j}_{-m,-k}(\omega) \qquad \text{(D-5)}$$

On obtient d'une part :

$$\left(u_\alpha a^+_{\alpha\, k_\alpha} - v_\alpha\, a_{\overline{\alpha\, k_\alpha}}\right) |BCS\rangle = \sum_{j_\alpha m_\alpha} \mathcal{D}^{j_\alpha *}_{m_\alpha, k_\alpha}(\omega) \sum_{(n\ell)_\alpha} C^{(n\ell)_\alpha,\, j_\alpha}_{\alpha\,,\, k_\alpha}$$

$$\left[u_\alpha\, a^+_{(n\ell)_\alpha\, j_\alpha\, m_\alpha} - v_\alpha\, \pi_\alpha\, (-1)^{j_\alpha + m_\alpha}\, a_{(n\ell)_\alpha\, j_\alpha\, -m_\alpha}\right] |BCS\rangle \qquad \text{(D-6)}$$

et d'autre part :

$$\left(u_\alpha\, a^+_{\overline{\alpha\, k_\alpha}} + v_\alpha\, a_{\alpha\, k_\alpha}\right) |BCS\rangle = -\sum_{j_\alpha m_\alpha} \mathcal{D}^{j_\alpha}_{-m_\alpha, k_\alpha}(\omega) \sum_{(n\ell)_\alpha} C^{(n\ell)_\alpha,\, j_\alpha}_{\alpha\,,\, k_\alpha}\, (-1)^{j_\alpha + m_\alpha}$$

$$\left[u_\alpha\, a^+_{(n\ell)_\alpha\, j_\alpha\, m_\alpha} - v_\alpha\, \pi_\alpha\, (-1)^{j_\alpha + m_\alpha}\, a_{(n\ell)_\alpha\, j_\alpha\, -m_\alpha}\right] |BCS\rangle \qquad \text{(D-7)}$$

avec $\alpha = (n, p)$

En remplaçant dans l'équation (D-1) les états de quasi-particules neutron et proton et leurs renversés du sens du temps par leurs décompositions (D-6) et (D-7) on fait apparaître un produit de matrices de Wigner :

$$\mathcal{D}^{j_n}_{m_n, k_n}(\omega)\; \mathcal{D}^{j_p}_{m_p, k_p}(\omega) = \sum_{J=|j_n - j_p|}^{j_n + j_p} \langle j_n\, m_n\,,\, j_p\, m_p \mid J,\, m_n + m_p\rangle \qquad \text{(D-8)}$$

$$\langle j_n\, k_n\,,\, j_p\, k_p \mid J,\, k_n + k_p\rangle\; \mathcal{D}^{J}_{m_n + m_p,\, k_n + k_p}(\omega)$$

où les $\langle j_n\, m_n\,,\, j_p\, m_p \mid J,\, m_n + m_p\rangle$, $\langle j_n\, k_n\,,\, j_p\, k_p \mid J,\, k_n + k_p\rangle$

sont des coefficients de Clebsch-Gordan.

Ces coefficients satisfont par ailleurs aux relations suivantes :

$$\langle j_1\, m_1\, , j_2\, m_2 \mid J\ m_1+m_2\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1\ -m_1,\ j_2\ -m_2 \mid J\ -(m_1+m_2)\rangle \qquad \text{(D-9)}$$

$$\langle j_1\, m_1, j_2\, m_2 \mid J\ \ m_1+m_2\rangle = (-1)^{j_1+m_2} \left(\frac{2J+1}{2j_1+1}\right)^{1/2} \langle J\ -(m_1+m_2),\ j_2\ m_2 \mid j_1\ -m_1\rangle$$

Pour la suite de nos calculs, on définit quatre types d'états :

$$\begin{aligned}
|p\,p\rangle &= a^{+}_{(n\ell)_p\, j_p\, m_p} \quad a^{+}_{(n\ell)_n\, j_n\, m_n} \mid BCS\rangle \\
|t\,t\rangle &= a_{(n\ell)_p\, j_p\, -m_p} \quad a_{(n\ell)_n\, j_n\, -m_n} \mid BCS\rangle \\
|t\,p\rangle &= a_{(n\ell)_p\, j_p\, -m_p} \quad a^{+}_{(n\ell)_n\, j_n\, m_n} \mid BCS\rangle \\
|p\,t\rangle &= a^{+}_{(n\ell)_p\, j_p\, m_p} \quad a_{(n\ell)_n\, j_n\, -m_n} \mid BCS\rangle
\end{aligned} \qquad \text{(D-10)}$$

respectivement appelés état particule-particule, état trou-trou, état trou-particule et état particule-trou.

$$\left| I\, M\, k_n\, k_p\, \alpha_n\, \alpha_p \right\rangle = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \left\{ \sum_{\substack{(n\ell)_n\, j_n\, m_n \\ (n\ell)_p\, j_p\, m_p}} \sum_{J=|j_n-j_p|}^{j_n+j_p} C^{(n\ell)_n\, j_n}_{\alpha_n\ \ k_n}\, C^{(n\ell)_p\, j_p}_{\alpha_p\ \ k_p} \right.$$

$$(-1)^{m_n+m_p-K} \langle j_n\, k_n,\ j_p\, k_p \mid J\ \ k_n+k_p\rangle \langle j_n\, m_n\, ,\ j_p\, m_p\rangle$$

$$\Big[u_n u_p \mid p\,p\rangle + (-1)^{j_n+j_p+m_n+m_p}\ \pi_n\ \pi_p\ V_n\ V_p\ \mid t\,t\rangle$$

$$- (-1)^{j_n+m_n}\ \pi_n\ u_p\ V_n\ \mid p\,t\rangle - (-1)^{j_p+m_p}\ \pi_p\ V_p\ u_n \mid t\,p\rangle \Big]$$

$$\left(\mathcal{D}^{I}_{M,\,K}(\omega)\ \ \mathcal{D}^{J}_{-(m_n+m_p),\,-(k_n+k_p)} + (-1)^{I+j_n+j_p}\ \ \mathcal{D}^{I}_{M,\,-K}(\omega)\ \ \mathcal{D}^{J}_{-(m_n+m_p),\,(k_n+k_p)} \right) \qquad \text{(D-11)}$$

où on a utilisé le fait que les nombres quantiques j_n, j_p, m_n, m_p, k_n et k_p sont demi-entiers et que le nombre quantique J est un entier d'une part et d'autre part que $\pi_n^2 = \pi_p^2 = +1$.

En appliquant de nouveau les relations (D-8) et (D-9), on fait apparaître dans l'état de la base standard (D-11) une nouvelle matrice de rotation de Wigner et un nouveau nombre quantique R allant de $|I - J|$ à $|I + J|$.

$$|I\,M\,k_n\,k_p\,\alpha_n\,\alpha_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{(n\ell)_n\,j_n\,m_n \\ (n\ell)_p\,j_p\,m_p}} \sum_{J=|j_n-j_p|}^{j_n+j_p} \sum_{R=|I-J|}^{I+J} \left[1+(-1)^R\right] \left(\frac{2R+1}{2J+1}\right)^{1/2} \tag{D-12}$$

$$C^{(n\ell)_n\,j_n}_{\alpha_n\;k_n}\; C^{(n\ell)_p\,j_p}_{\alpha_p\;k_p}\; \langle j_n k_n, j_p k_p \,|\, J\; k_n+k_p\rangle \langle J\; K, R\; 0 \;|\; I\; K\;\rangle$$

$$|R\,I\,M\,J\,(n\ell)_n\,(n\ell)_p\,j_n\,j_p\rangle$$

avec $\qquad K = k_n + k_p$

L'état $|R\,I\,M\,J\,(n\ell)_n\,(n\ell)_p\,j_n\,j_p\rangle$ est un état propre de $\vec{R}^2$ avec la valeur propre R(R + 1).

$$|R\,I\,M\,J\,(n\ell)_n\,(n\ell)_p\,j_n\,j_p\rangle = \sum_{m_n\,m_p} \left(\frac{2R+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \mathcal{D}^{R}_{M-(m_n+m_p),\,0}(\omega)$$

$$\langle j_n\,m_n, j_p\,m_p \,|\, J\; m_n+m_p\rangle \langle J\; m_n+m_p, R\;\; M-(m_n+m_p) \,|\, I\,M\rangle \tag{D-13}$$

$$\Big[u_n u_p\,|\,pp\rangle + (-1)^{j_n+j_p+m_n+m_p}\,\pi_n\,\pi_p\,v_n\,v_p\,|\,tt\rangle$$
$$-(-1)^{j_n+m_n}\,\pi_n\,u_p\,v_n\,|\,pt\rangle - (-1)^{j_p+m_p}\,\pi_p\,v_p\,u_n\,|\,tp\rangle\Big]$$

Cet état est dit état quasi-sphérique.

La somme sur R dans l'état de la base standard est donc restreinte aux seules valeurs paires entières.

Finalement, on va supposer que tous les états

$a^{+}_{(nl)\,j\,m}\,|BCS\rangle$ et $a_{(nl)\,j\,-m}\,|BCS\rangle$ forment une base orthonormée.

Sous ces hypothèses simplificatrices, le produit scalaire de deux états quasi-sphériques est égal à :

$$\langle R'\ I\ M\ J'\ (nl)_{n'}\ (nl)_{p'}\ j_{m'}\ j_{p'} \mid R\ I\ M\ J\ (nl)_{n}\ (nl)_{p}\ j_{m}\ j_{p}\rangle$$
$$= \left(u_n u_{n'} u_p u_{p'} + v_n v_{n'} v_p v_{p'} + u_n u_{n'} v_p v_{p'} + u_p u_{p'} v_n v_{n'}\right) \qquad \text{(D-14)}$$

où l'on a utilisé la propriété suivante des coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\sum_{JM} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM\rangle \langle j_1 m_1', j_2 m_2' \mid JM\rangle = \qquad \text{(D-15)}$$

$$\delta_{m_1, m_1'}\ \delta_{m_2, m_2'}$$

et la relation de normalisation de matrices de Wigner :

$$\int d\omega \left(\frac{2R+1}{8\pi^2}\right) \mathcal{D}^{R'\,*}_{M',0}(\omega)\ \mathcal{D}^{R}_{M,0}(\omega) = \delta_{RR'}\,\delta_{MM'} \qquad \text{(D-16)}$$

Appendice E

On se propose de calculer la valeur moyenne de H_{coll} équ.(II-36) (dans le cas où les moments d'inertie du coeur sont constants) entre les états de la base standard équ.(II-14) (notations du chapître II).

$$H_{coll} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \left\{ \left(\vec{I}^2 - I_z^2\right) + \left(\vec{j}_p^{\,2} - j_{pz}^2 + \vec{j}_n^{\,2} - j_{nz}^2\right) + \left(j_p^+ j_n^- + j_p^- j_n^+\right) \right. \qquad \text{(E-1)}$$
$$\left. - \left[\left(I^+ j_p^- + I^- j_p^+\right) + \left(I^- j_n^+ + I^+ j_n^-\right) \right] \right\}$$

En remplaçant dans l'équation (II-24) H par H_{coll} on a donc évaluer :

$$\langle I M k_{n'} k_{p'} \alpha_{n'} \alpha_{p'} \mid H_{coll} \mid I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p \rangle = \qquad \text{(E-2)}$$
$$= \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right) \Big[\langle BCS\ \eta_{\alpha_{p'} k_{p'}}\ \eta_{\alpha_{n'} k_{n'}}\ \mathcal{D}^I_{M,K'}(\omega) \mid H_{coll} \mid \mathcal{D}^I_{M,K}(\omega)\ \eta^+_{\alpha_n k_n}\ \eta^+_{\alpha_p k_p} \mid BCS \rangle$$
$$+ (-1)^{I+K'}\ \pi_{n'}\pi_{p'} \langle BCS\ \eta_{\overline{\alpha_{p'} k_{p'}}}\ \eta_{\overline{\alpha_{n'} k_{n'}}}\ \mathcal{D}^I_{M,-K'}(\omega) \mid H_{coll} \mid \mathcal{D}^I_{M,+K}(\omega) \eta^+_{\alpha_n k_n} \eta^+_{\alpha_p k_p} \mid BCS \rangle$$

Le terme diagonal de rotation H_{rot} ne donnera pas des contributions en $(-1)^{I+K'}$.

$$\langle I M k_{n'} k_{p'} \alpha_{n'} \alpha_{p'} \mid \left(\vec{I}^2 - I_z^2\right) \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \mid I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p \rangle =$$
$$= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\ \delta_{KK'}\ \delta_{pp'}\ \delta_{nn'}\ \left[I(I+1) - K^2\right] \qquad \text{(E-3)}$$

Le terme H_r n'aura pas non plus de contributions en $(-1)^{I+K'}$

$$\langle I M k_{n'} k_{p'} \alpha_{n'} \alpha_{p'} \mid \left(\vec{j}_p^{\,2} - j_{pz}^2 + \vec{j}_n^{\,2} - j_{nz}^2\right) \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \mid I M k_n k_p \alpha_n \alpha_p \rangle =$$
$$= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\ \delta_{KK'} \Big[-\delta_{pp'}\delta_{nn'} \left(k_n^2 + k_p^2\right) + \delta_{pp'} \left(u_n u_{n'} + v_n v_{n'}\right) \langle \alpha_{n'} k_{n'} \mid \vec{j}_n^{\,2} \mid \alpha_n k_n \rangle$$
$$+ \delta_{nn'} \left(u_p u_{p'} + v_p v_{p'}\right) \langle \alpha_{p'} k_{p'} \mid \vec{j}_p^{\,2} \mid \alpha_p k_p \rangle \Big] \qquad \text{(E-4)}$$

Remarques :

Les opérateurs j_n^2 et j_p^2 sont supposés être des opérateurs à un corps, ils sont de type pair par renversement du sens du temps. L' équation (C-12) donne la valeur moyenne d'un tel opérateur entre des états de quasi-particules

$$\langle BCS\ \eta_{\alpha' k_{\alpha'}} \mid \vec{j}^2 \mid \eta^+_{\alpha k_\alpha}\ BCS\rangle = (u_\alpha u_{\alpha'} - V_\alpha V_{\alpha'}) \langle \alpha' k_{\alpha'} \mid \vec{j}^2 \mid \alpha k_\alpha\rangle + \\ + \delta_{\alpha\alpha'} \sum_\beta \langle \beta k_\beta \mid \vec{j}^2 \mid \beta k_\beta\rangle V_\beta^2 \qquad \text{(E-5)}$$

On remarque que pour tous les éléments diagonaux, si on inclut le terme en α de la somme sur B, on a un facteur $u_\alpha^2 + v_\alpha^2$.
On fait l'hypothèse que pour les termes non diagonaux, on garde le facteur $u_\alpha u_{\alpha'} + v_\alpha v_{\alpha'}$.

$$\langle BCS\ \eta_{\alpha' k_{\alpha'}} \mid \vec{j}^2 \mid \eta^+_{\alpha k_\alpha}\ BCS\rangle = (u_\alpha u_{\alpha'} + V_\alpha V_{\alpha'}) \langle \alpha' k_{\alpha'} \mid \vec{j}^2 \mid \alpha k_\alpha\rangle \qquad \text{(E-6)}$$

Pour calculer les termes restants on a évalué les valeurs moyennes $j^\pm$ entre des états de quasi-particules. Ces opérateurs sont de type impair par renversement du sens du temps.
Selon l'équation (C - 13), on a :

$$\langle BCS\ \eta_{\alpha' k_{\alpha'}} \mid j^\pm \mid \eta^+_{\alpha k_\alpha}\ BCS\rangle = (u_\alpha u_{\alpha'} + V_\alpha V_{\alpha'}) \langle \alpha' k_{\alpha'} \mid j^\pm \mid \alpha k_\alpha\rangle$$

(E-7)

Le calcul du terme de Coriolis H_{RPC} s'obtient par l'action des opérateurs I^+ et I^- sur les matrices de Wigner :

$$I^{\pm}\, \mathcal{D}^{I}_{M,K}(\omega) = \left[(I \pm K)(I \mp K+1) \right]^{1/2} \mathcal{D}^{I}_{M,K\mp 1}(\omega) \qquad \text{(E-8)}$$

et l'on a :

$$\langle I M k_{m'} k_{p'} \alpha_{m'} \alpha_{p'} | -\frac{\hbar^2}{2J}\left[(I^+ j^-_{p} + I^- j^+_{p}) + (I^- j^+_{m} + I^+ j^-_{m}) \right] | I M k_m k_p \alpha_m \alpha_p \rangle =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2J}\,\delta_{K+1,K'}\left[(I-K)(I+K+1)\right]^{1/2}\Big\{ \delta_{mm'}\,\delta_{k_{p'},k_p+1}\langle \alpha_{p'} k_{p'} | j^+_p | \alpha_p k_p\rangle (u_p u_{p'} + v_p v_{p'})$$

$$+ \delta_{pp'}\,\delta_{k_{m'},k_m+1}\langle \alpha_{m'} k_{m'} | j^+_m | \alpha_m k_m\rangle (u_m u_{m'} + v_m v_{m'})\Big\}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2J}\,\delta_{K-1,K'}\left[(I+K)(I-K+1)\right]^{1/2}\Big\{ \delta_{mm'}\,\delta_{k_{p'},k_p-1}\langle \alpha_{p'} k_{p'} | j^-_p | \alpha_p k_p\rangle (u_p u_{p'} + v_p v_{p'})$$

$$+ \delta_{pp'}\,\delta_{k_{m'},k_m-1}\langle \alpha_{m'} k_{m'} | j^-_m | \alpha_m k_m\rangle (u_m u_{m'} + v_m v_{m'})\Big\}$$

$$-(-1)^{I}\frac{\hbar^2}{2J}\,\delta_{K=1}\,\delta_{K'=0}\,\pi_{m'}\pi_{p'}\left[(I+1)I\right]^{1/2}\Big\{ \delta_{mm'}\,\delta_{-k_{p'},k_{p'}-1}\langle \overline{\alpha_{p'} k_{p'}} | j^-_p | \alpha_p k_p\rangle (u_p u_{p'} + v_p v_{p'})$$

$$+ \delta_{pp'}\,\delta_{-k_{m'},k_{m'}-1}\langle \overline{\alpha_{m'} k_{m'}} | j^-_m | \alpha_m k_m\rangle (u_m u_{m'} + v_m v_{m'})\Big\} \qquad \text{(E-9)}$$

Cette partie du Hamiltonien n'aura pas d'éléments de matrice diagonaux. Les seuls éléments non nuls satisfont a $\delta_{K\pm1,K'}$ et une contribution en $(-1)^{I+K'}$ pour K et K' tels que $\delta_{K\mp1,\,-K'}$

Le terme de couplage particule-particule donne quant à lui :

$$\langle I M k_{m'} k_{p'} \alpha_{m'} \alpha_{p'} | \frac{\hbar^2}{2J} \left(j_p^+ j_m^- + j_p^- j_m^+ \right) | I M k_m k_p \alpha_m \alpha_p \rangle =$$

$$\cdot \frac{\hbar^2}{2J} \delta_{KK'} \left(u_m u_{m'} + V_m V_{m'} \right) \left(u_p u_{p'} + V_p V_{p'} \right) \Big\{ \delta_{k_{p'}, k_p + 1} \; \delta_{k_{m'}, k_m - 1}$$

$$\langle \alpha_{p'} k_{p'} | j_p^+ | \alpha_p k_p \rangle \langle \alpha_{m'} k_{m'} | j_m^- | \alpha_m k_m \rangle + \delta_{k_{p'}, k_p - 1} \; \delta_{k_{m'}, k_m + 1}$$

$$\langle \alpha_{p'} k_{p'} | j_p^- | \alpha_p k_p \rangle \langle \alpha_{m'} k_{m'} | j_m^+ | \alpha_m k_m \rangle$$

$$+ (-1)^I \delta_{K=0} \; \pi_{m'} \pi_{p'} \Big[$$

$$\delta_{k_{p'}=1/2} \; \delta_{k_{m'}=-1/2} \; \delta_{k_p=1/2} \; \delta_{k_m=-1/2} \; \langle \overline{\alpha_{p'} k_{p'}} | j_p^+ | \alpha_p k_p \rangle \langle \overline{\alpha_{m'} k_{m'}} | j_m^- | \alpha_m k_m \rangle$$

$$+ \delta_{k_{p'}=-1/2} \; \delta_{k_{m'}=1/2} \; \delta_{k_p=-1/2} \; \delta_{k_m=1/2} \; \langle \overline{\alpha_{p'} k_{p'}} | j_p^- | \alpha_p k_p \rangle \langle \overline{\alpha_{m'} k_{m'}} | j_m^+ | \alpha_m k_m \rangle \Big] \Big\}$$

(E-10)

Ce terme est diagonal en K et n'aura de contribution non nulle que pour $K = K' = 0$.

Références

(1) J.TREHERNE, J.GENEVY, S.ANDRE, R.BERAUD, A.CHARVET, R.DUFFAIT, A.EMSALLEM, M.MEYER, C.BOURGEOIS, P.KILCHER, J.SAUVAGE, F.BECK and T.BYRSKI, Phys. Rev. C27 (1983) 166 et références incluses.

(2) S.ELFSTRÖM, I.FORSBLOM, K.FRANSSON, L.HILDINGSSON and W.KLAMRA Annual Report 1981,Research Institute of Physics Stockholm,Sweden

(3) J.R.LEIGH, F.S.STEPHENS and R.M.DIAMOND, PL 33B (1970) 410.

(4) D.VAUTHERIN and D.M.BRINK, Phys. Rev. C5 (1972) 626.

(5) D.VAUTHERIN,Phys.Rev. C7 (1973) 457.

(6) K.A.BRÜCKNER ,Phys. Rev. 97 (1955) 1353 et références incluses.

(7) K.A.BRÜCKNER, J.L.GAMMEL et H.WEITZNER ,Phys. Rev. 110 (1958) 431.

(8) D.GOGNY ,Contribution 2-12 à " Int. Conf. on Nucl. Phys. ", Munuich,août (1973) ;et comm. privée.

(9) D.GOGNY ,comm. privée (1973),cf. par exemple (P.QUENTIN,Suppl.Journ.de Phys. 34 (1973) C4-34,page 101)

(10) T.H.R.SKYRME,Phil. Mag. 1 (1956) 1043; Nucl. Phys. 9 (1959)615.

(11) J.V.NEGELE et D.VAUTHERIN,Phys, Rev. C5 (1972) 1472.

(12) J.V.NEGELE et D.VAUTHERIN,Phys. Rev. C11 (1975) 1031.

(13) J.P.BOISSON, R.PIEPENBRING and P.OGLE,Phys. Rep. 26 (1976) 99.

(14) M.BEINER, H.FLOCARD, NGUYEN VAN GIAI and P.QUENTIN, Nucl. Phys. A238 (1975) 29.

(15) H.FLOCARD, P.QUENTIN, A.K.KERMAN and D.VAUTHERIN, Nucl. Phys. A203 (1973) 433.

(16) M.CAILLIAU, J.LETESSIER, H.FLOCARD and P.QUENTIN, Phys. Lett. 46B (1973) 11.

(17) J.SAUVAGE-LETESSIER, P.QUENTIN and H.FLOCARD, Nucl. Phys. A370 (1981) 231.

(18) X.CAMPI, H.FLOCARD, A.K.KERMAN and S.E.KOONIN, Nucl. Phys. A251 (1975) 193.

(19) X.CAMPI and M.EPHERRE, Phys. Rev. C22 (1980) 2605.

(20) J.LIBERT and P.QUENTIN, Phys. Rev. C25 (1982) 571 .

(21) H.FLOCARD, P.QUENTIN and VAUTHERIN, Phys. Lett. 46B (1973) 304.

(22) P.QUENTIN in "Nuclear Self-Consistent Fields" eds. G.RIPKA and M.PORNEUF (North-Holland,Amsterdam,1975) p.297.

(23) P.QUENTIN, H.FLOCARD, Ann. Rev. Nucl. Sci. 28 (1978) 523.

(24) I.L.LAMM, N.P. A125 (1969) 504.

(25) U.GÖTZ, H.G.PAULI, K.ALDER and K.JUNKER, N.P. A192 (1972) 1.

(26) A.BOHR and MOTTELSON, "Nuclear Structure",vol.2 (Benjamin,New York,1975)

(27) M.A.DELEPLANQUE, C.GERSCHEL, N.PERRIN and P.QUENTIN,Phys.Lett. 46B (1973) 29.

(28) R.POPLI, F.A.RICKEY, L.E.SAMUELSON and P.C.SIMMS, Phys. Rev. C23 (1981) 1085.

(29) H.TOKI, K.NEERGARD, P.VOGEL and A.FAESSLER, Nucl. Phys. A229 (1977) 1.

(30) P.VOGEL, Phys. Lett. 33B (1970) 400.

(31) J.DANIERE, M.MEYER, J.LETESSIER and P.QUENTIN, Nucl. Phys. A316 (1979) 93.

(32) M.BEINER, H.FLOCARD, NGUYEN VAN GIAI and P.QUENTIN, Nucl. Phys. A238 (1975) 29.

(33) M.G.DESTHUILLIERS-PORQUET, M.MEYER, P.QUENTIN and J.SAUVAGE-LETESSIER, 4th International Conference on Nulei far from Stability, C.E.R.N. Report 81-09,Vol.II (1981) 623.

(34) J.LIBERT, Thèse Université Paris VII (1981).

(35) J.LIBERT, M.MEYER and P.QUENTIN, Phys. Lett. 95B (1980) 175.

(36) J.LIBERT, M.MEYER and P.QUENTIN, Phys. Rev. C25 (1982) 586.

(37) P.QUENTIN, M.MEYER, J.LETESSIER, J.LIBERT and M.G.DESTHUILLIERS-PORQUET, Ins. Phys. Conf. Ser. N°51,Ed. T. Von Egidy (The INSTITUTE of PHYSICS, Bristol,1980) 280.

(38) R.R.CHASMAN and S.WAHLBORN, Nucl. Phys. A90 (1967) 401.

(39) R.MUTUKRISHNAN, Nucl. Phys. A93 (1967) 417.

(40) P.QUENTIN, J. Phys. (Paris) 33 (1972) 457.

(41) P.QUENTIN, Thèse d'Etat (1975),p.156.

(42) C.J.GALLAGHER and S.A.MOSZKOWSKI, Phys. Rev. 111 (1958) 1282.

(43) V.A.IONESCU, JEAN KERN, R.F.CASTEN, W.R.KANE, I.AHMAD, J.ERSKINE, A.M.FRIEDMAN and K.KATORI, Nucl. Phys. A313 (1979) 283.

(44) M.MOSHINSKY, Nucl. Phys. 13 (1959) 104.

(45) C.G.ANDERSON, S.E.LARSSON, G.LEANDER, P.MOLLER; S.G.NILSSON, I.RAGNARSSON, S.ABERG and R.BENGTSSON, Z.SZYMANSKI, Nucl. Phys. A268 (1976) 205.

(46) A.J.KREINER, M.A.J.MARISCOTTI, C.BAKTASH, E.der MATEOSIAN, P.THIERBERGER, Phys. Rev. C23 (1981) 748.

(47) J.A.PINSTON, R.BENGTSSON, E.MONNAND and D.BARNEOUD, Nucl. Phys.A361 (1981) 464.

(48) P.WASIELEWSKI and F.B.MALIK, Nucl. Phys. A160 (1971) 113.

(49) R.R.CHASMAN, I.AHMAD, A.M.FRIEDMAN and J.R.ERSKINE, Rev. Mod. Phys. 49 (1977)833.

(50) H.D.JONES and R.K.SHELINE, Phys. Rev.C, vol.1 N°6 (1970) 2030.

(51) R.A.O'NEIL and D.G.BURKE, Nucl. Phys. A195 (1972) 207.

(52) P.QUENTIN, Thèse d'Etat (1975), p.60.

(53) J.D.TALMAN, Nucl. Phys. A141 (1970) 273.